

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

БАЛАШОВ Олег Игоревич

АЛГЕБРЫ ЙОНЕДЫ
АЛГЕБР ДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ

доктор физико-математических наук

профессор ГЕНЕРАЛОВ А.И.

Санкт-Петербург

2000

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Резольвенты и сизигии	17
1.1. Формулировка основных результатов	17
1.2. Диаграммный метод	25
1.3. Серия $D(3\mathcal{K})$	36
1.4. Серия $D(3\mathcal{A})_1$	57
Глава 2. Образующие и соотношения	73
2.1. Предварительные сведения	73
2.2. Серия $D(3\mathcal{K})$	76
2.3. Серия $D(3\mathcal{A})_1$	88
Литература	107

Введение

Гомологическая алгебра, возникшая в 1940-х гг. в алгебраической топологии, быстро нашла применения и в различных разделах алгебры. Классическими стали учебники А. Картана и С. Эйленберга [13] и С. Маклейна [15], не теряющие своей актуальности и до настоящего времени.

Важной областью, находящейся на стыке гомологической алгебры и теории представлений, является вопрос описания колец когомологий конечных групп. Один из самых известных и впечатляющих результатов в этой области — следующая теорема начала 1960-х гг.

Теорема 0.1. (Голод [10], Венков [6], Ивэнс [42]) *Пусть G — конечная группа, R — нетерово коммутативное кольцо. Тогда кольцо когомологий $H^*(G, R)$ нетерово.*

Из данной теоремы вытекает, в частности, что кольца когомологий конечных групп могут быть записаны в терминах порождающих элементов (взятых в конечном числе) и соотношений. Кольца когомологий групп исследовались различными авторами, и в этой области к настоящему моменту имеется множество результатов.

В 1980-х гг. понятия многообразия и сложности модуля, имеющих тесную связь с рядами Пуанкаре, также были успешно применены для решения данной задачи (см. монографию Д. Бенсона [25], а также работы Дж. Карлсона [30, 31], Д. Бенсона и Дж. Карлсона [27, 28], Дж. Альперина [18, 19], Дж. Альперина и Л. Ивенса [21, 22]). Кроме того, заслуживает упоминания диаграммный метод Д. Бенсона и Дж. Карлсона [28], берущий свое начало в работе Дж. Альперина [20]. Отметим также появление в 1970-х гг. теории М. Ауслендера и И. Райтен [23, 24], которая дала новый толчок развитию теории представлений.

Упомянутые выше методы (в числе других результатов) вошли в известные монографии Д. Бенсона [25, 26], А. Адема и Р. Милграма [17] (см. также библиографию в этих изданиях).

В 1980-х — начале 1990-х гг. К. Эрдманн в ряде работ [34, 36, 37, 38, 39] решила задачу классификации блоков групповых алгебр ручного типа представлений с точностью до Морита-эквивалентности, и систематизировала полученные результаты в монографии [40]. При этом был получен список базисных алгебр, каждая из которых определяется как алгебра путей некоторого колчана с соотношениями.

В настоящей диссертационной работе предлагается новый, унифицированный, подход к вычислению колец когомологий групповых алгебр ручного типа представлений. Так как известен полный список базисных алгебр, Морита-эквивалентных главным блокам групповых

алгебр ручного типа, то возможно вычисление кольца когомологий $H^*(G, K)$ группы G с использованием описания алгебры Йонеды соответствующей базисной алгебры, Морита-эквивалентной KG . Используя комбинаторные приемы и дальнейшую разработку упомянутого выше диаграммного метода Бенсона–Карлсона [28], мы вычисляем алгебры Йонеды алгебр двух серий из классификации К. Эрдманн (а именно, серий алгебр “диэдрального типа” с тремя классами изоморфизма простых модулей). При этом удается описать Ext-алгебры простых модулей над блоками ручного типа представлений с тремя (попарно неизоморфными) простыми модулями и диэдральной дефектной группой. В частности, мы получаем описание колец когомологий некоторых проективных специальных линейных и знакопеременных групп (ср. [17]).

Для того, чтобы сформулировать основные результаты диссертации, напомним понятия блоков, типа представлений, произведения Йонеды, а также приведем необходимые нам сведения из работ К. Эрдманн.

Пусть G — конечная группа, K — поле характеристики p . Групповая алгебра KG равна прямой сумме (двусторонне) неразложимых алгебр, $KG = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$, и алгебры B_i называются *блоками* алгебры KG . Эквивалентно, единица алгебры KG равна сумме центральных примитивных идемпотентов e_i , и $B_i = KG e_i$. Если M — неразложи-

мый (левый) KG -модуль, то $M = e_1M \oplus \cdots \oplus e_mM$, и существует такой индекс i , что $e_iM = M$, и $e_jM = 0$ при $j \neq i$. В этом случае говорят, что модуль M принадлежит блоку B_i . Таким образом, все простые и главные неразложимые KG -модули классифицируются по блокам.

Хорошо известно, что блок групповой алгебры является симметричной алгеброй и, в частности, квазифробениусовой (QF -) алгеброй. Если p делит порядок группы G , то блоки алгебры KG обычно не полупросты. Напомним, что если p не делит порядок группы G , то алгебра KG полупроста (теорема Машке).

Важную роль при изучении групповой алгебры KG играет силовская p -подгруппа группы G . Аналогично, для блока B определяется *дефектная группа блока*, т. е. минимальная подгруппа D группы G такая, что каждый (конечно порожденный левый) B -модуль D -проективен (модуль M D -проективен, если M изоморфен прямому слагаемому модуля $KG \otimes_{KD} N$ для некоторого D -модуля N). Дефектные группы блока образуют класс сопряженности p -подгрупп в G . Кроме того, если B — главный блок алгебры KG , т. е. блок, содержащий тривиальный KG -модуль K , то его дефектные группы совпадают с силовскими p -подгруппами G .

Для блока, рассматриваемого как K -алгебра, можно говорить о его типе представлений. В литературе имеется несколько определений типа представлений; мы будем следовать [26]. Пусть K — бесконечное поле, Λ — конечномерная K -алгебра. Мы говорим, что

(1) Λ имеет *конечный тип представлений*, если имеется конечное число классов изоморфизма неразложимых Λ -модулей;

(2) Λ имеет *ручной тип представлений*, если Λ не является алгеброй конечного типа представлений, и для любой размерности d имеется конечный набор Λ - $K[T]$ -бимодулей M_i ($i = 1, \dots, n_d$), свободных как правые $K[T]$ -бимодули, такой, что все, кроме конечного числа, неразложимые Λ -модули размерности d имеют форму $M_i \otimes_{K[T]} M$ для некоторого i и некоторого неразложимого $K[T]$ -модуля M ;

(3) Λ имеет *дикий тип представлений*, если существует конечно порожденный Λ - $K\langle X, Y \rangle$ -бимодуль M , свободный как правый $K\langle X, Y \rangle$ -модуль, такой, что функтор $M \otimes_{K\langle X, Y \rangle} -$ из категории конечномерных левых $K\langle X, Y \rangle$ -модулей в категорию конечномерных левых Λ -модулей сохраняет свойство неразложимости и классы изоморфизма (говоря неформально, для алгебры Λ дикого типа задача о классификации неразложимых Λ -модулей включает в себя “дикую” задачу о классификации пар матриц одновременным преобразованием сопряжения).

Хорошо известен следующий результат [11, 12, 32]: над алгебраически замкнутым полем K любая конечномерная K -алгебра имеет конечный, ручной, или дикий тип представлений, и эти три случая взаимно исключительны.

В 1930-х — 1970-х гг. рядом авторов были получены критерии, когда групповая алгебра KG имеет конечный или ручной тип представлений (G — конечная группа, K — поле). Из теоремы Машке следует, что

KG — конечного типа, если K имеет характеристику 0, или характеристика K — простое число, не делящее порядок G . Д. Хигман [49] показал, что если $\text{char } K = p$, и p делит порядок G , то KG имеет конечный тип представлений тогда и только тогда, когда силовская p -подгруппа группы G циклическая.

С. А. Кругляк [14] показал, что если $\text{char } K > 2$, то групповая алгебра KG нециклической группы G имеет дикий тип представлений. Для $p = 2$, Ш. Бреннер [29] показала, что групповые алгебры KG всех 2-групп, за исключением циклических, диэдральных, полудиэдральных групп и обобщенных групп кватернионов, имеют дикий тип (напомним, что диэдральные, полудиэдральные группы и обобщенные группы кватернионов определяются следующим образом, соответственно:

$$D_m = \langle g, h : g^2 = h^{2^m} = 1, hg = gh^{-1} \rangle, \quad m \geq 1,$$

$$SD_m = \langle g, h : g^2 = h^{2^m} = 1, hg = gh^{2^{m-1}-1} \rangle, \quad m \geq 3,$$

$$Q_m = \langle g, h : g^2 = h^{2^{m-1}}, hg = gh^{-1} \rangle, \quad m \geq 2).$$

В. М. Бондаренко [4] и С. Рингель [57] независимо показали, что групповые алгебры диэдральных 2-групп имеют ручной тип; и Ю. А. Дроздом и В. М. Бондаренко [5] (см. также [58]) было доказано, что групповые алгебры полудиэдральных групп и обобщенных групп кватернионов — ручные. (Достаточно полный обзор о типе представлений групповых алгебр можно найти в [52]). Описанные выше результаты относительно типа представлений групповых алгебр обобщаются на случай блоков.

Теорема 0.2. Пусть K — бесконечное поле. Рассмотрим групповую алгебру KG конечной группы G над полем характеристики p (или блок B алгебры KG). Пусть D — силовская p -подгруппа группы G (или дефектная группа блока B). Тогда тип представлений алгебры KG (или блока B)

- (1) конечный, если D — циклическая;
- (2) ручной, если $p = 2$ и D — диэдральная, полудиэдральная группа или обобщенная группа кватернионов;
- (3) дикий, во всех остальных случаях.

Для сравнения, теорема Машке соответствует случаю $D = \langle 1 \rangle$.

Заметим, что блоки конечного типа, с теоретико-модулярной точки зрения, достаточно хорошо изучены (см. [44, 48, 50, 53, 54]).

Теперь мы приведем основные понятия К. Эрдманн, которые она использовала при классификации блоков ручного типа представлений с точностью до Морита-эквивалентности. В частности, для удобства классификации были введены понятия так называемых алгебр “диэдрального”, “полудиэдрального” и “кватернионного” типов.

Определение 0.3. (Эрдманн [34, 40]) Мы говорим, что алгебра Λ является алгеброй диэдрального типа, если для нее выполнены следующие три условия.

- (1) Λ — симметричная, двусторонне неразложимая алгебра, имеющая один, два или три простых (попарно неизоморфных) модуля.

(2) Стабильный AR -колчан $\Gamma_s(\Lambda)$ алгебры Λ имеет следующую структуру:

(2а) в $\Gamma_s(\Lambda)$ имеется $k - 1$ 3-трубок, где k — число простых модулей;

(2б) каждая другая компонента $\Gamma_s(\Lambda)$ — либо 1-трубка, либо непериодическая компонента, на которой $\beta \equiv 2$ (если M — Λ -модуль, то $\beta(M)$ — количество непроективных неразложимых слагаемых модуля E из AR -последовательности $0 \rightarrow \tau M \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$).

(3) Матрица Картана алгебры Λ невырождена.

Алгебры диэдрального и кватернионного типов определяются аналогично (см. [36, 37, 40]).

Заметим, что в [40] К. Эрдманн приводит другое, более широкое определение алгебр диэдрального типа. Однако, как показывает следующая теорема, блоки, имеющие диэдральную дефектную группу, хорошо описываются при помощи данного определения, поэтому мы будем в дальнейшем пользоваться именно им. Заметим также, что в работе К. Эрдманн [41] для случая алгебр диэдрального типа доказано, что из остальных условий соответствующего понятия следует, что число (попарно неизоморфных) простых модулей не превосходит трех. Для кватернионного случая это доказано в [35], и полудиэдральный случай рассмотрен в [40].

Теорема 0.4. (Эрдманн [34, 40]) *Любой блок с диэдральной дефектной группой является алгеброй диэдрального типа; всякая алгебра диэдрального типа имеет ручной тип представлений.*

Аналогичный результат справедлив для алгебр полудиэдрального и кватернионного типов (см. [36, 37, 38, 39, 40]).

Для описания алгебр диэдрального типа с тремя простыми модулями, К. Эрдманн в работе [34] ввела четыре серии базисных алгебр, а именно, серии $D(3\mathcal{K})$, $D(3\mathcal{A})_1$, $D(3\mathcal{B})_1$ и $D(3\mathcal{D})_1$ (в обозначениях [40, pp. 294–297]), и каждая из алгебр этих серий была определена как алгебра путей некоторого колчана с соотношениями.

К. Эрдманн [34] показала, что алгебры указанных четырех серий являются алгебрами диэдрального типа, и, более того, представляют собой полный список базисных алгебр диэдрального типа с тремя простыми модулями. Следовательно, любая алгебра диэдрального типа с тремя простыми модулями Морита-эквивалентна одной из указанных алгебр.

Однако (см. [34]), алгебры только трех из этих четырех серий реализуются как блоки, а именно — алгебры серий $D(3\mathcal{K})$, $D(3\mathcal{A})_1$ и $D(3\mathcal{B})_1$ (точное утверждение см. в параграфе 1.1). Аналогичный результат формулируется для алгебр диэдрального типа с одним или двумя простыми модулями, а также для алгебр полудиэдрального и кватернионного типов.

Теперь мы напомним понятие произведения Йонеды и его взаимосвязь с известным \cup -произведением в $H^*(G, K)$.

Пусть Λ — произвольная конечномерная K -алгебра. Если M, N — Λ -модули, то любой элемент $\varphi \in \text{Ext}_{\Lambda}^m(M, N)$, $m \geq 1$, может быть

представлен точной последовательностью

$$0 \rightarrow N \rightarrow X_m \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

На последовательностях такого вида вводится отношение эквивалентности, а также согласованная с ним операция сложения (см., например, [15]). Если

$$0 \rightarrow L \rightarrow Y_n \rightarrow \cdots \rightarrow Y_1 \rightarrow N \rightarrow 0$$

— точная последовательность, представляющая элемент $\psi \in \text{Ext}_\Lambda^n(N, L)$, $n \geq 1$, то произведение Йонеды $\psi \circ \varphi$ определяется как элемент группы расширений $\text{Ext}_\Lambda^{m+n}(M, L)$, представленный точной последовательностью

$$0 \rightarrow L \rightarrow Y_n \rightarrow \cdots \rightarrow Y_1 \rightarrow X_m \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Если же $n = 0$, то группа расширений $\text{Ext}_\Lambda^0(N, L) = \text{Hom}_\Lambda(N, L)$, и $\psi \circ \varphi$ определяется как элемент $\psi_*(\varphi) \in \text{Ext}_\Lambda^m(M, L)$, где $\psi_*: \text{Ext}_\Lambda^m(M, N) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^m(M, L)$ — гомоморфизм, индуцированный ψ ; аналогично определяется $\psi \circ \varphi$ при $m = 0$. Очевидно, такое произведение ассоциативно (корректность определения проверяется в [15]).

Если $M = N = L$, то на множестве $\mathcal{E}(M) = \bigoplus_{m \geq 0} \text{Ext}_\Lambda^m(M, M)$ с помощью описанного произведения Йонеды вводится структура K -алгебры, и $\mathcal{E}(M)$ естественным образом превращается в градуированную K -алгебру с единицей $1_{\mathcal{E}(M)} = \text{id}_M \in \text{Hom}_\Lambda(M, M) = \text{Ext}_\Lambda^0(M, M)$. Мы будем называть эту алгебру *Ext-алгеброй модуля M* .

Пусть $J(\Lambda)$ — радикал Джекобсона алгебры Λ , $\bar{\Lambda} = \Lambda/J(\Lambda)$ — соответствующая факторалгебра. Ext-алгебра $\mathcal{E}(\bar{\Lambda})$ модуля $\bar{\Lambda}$ называется алгеброй Йонеды алгебры Λ ; будем обозначать ее через $\mathcal{Y}(\Lambda)$.

Пусть теперь $\Lambda = KG$ — групповая алгебра. Если M, M', N и N' — KG -модули, то хорошо известно \cup -произведение

$$\cup: \text{Ext}_{KG}^m(M, M') \times \text{Ext}_{KG}^n(N, N') \rightarrow \text{Ext}_{KG}^{m+n}(M \otimes_{KG} N, M' \otimes_{KG} N')$$

и его взаимосвязь с произведением Йонеды: если $\varphi \in \text{Ext}_{KG}^m(M, M')$, $\psi \in \text{Ext}_{KG}^n(N, N')$, то

$$\varphi \otimes \text{id}_{N'} \in \text{Ext}_{KG}^m(M \otimes_{KG} N', M' \otimes_{KG} N'),$$

$$\text{id}_M \otimes \psi \in \text{Ext}_{KG}^n(M \otimes_{KG} N, M \otimes_{KG} N'), \text{ и}$$

$$\varphi \cup \psi = (\varphi \otimes \text{id}_{N'}) \circ (\text{id}_M \otimes \psi) \in \text{Ext}_{KG}^{m+n}(M \otimes_{KG} N, M' \otimes_{KG} N')$$

(см., например, [15, 26]). В частности, если $M = M' = N = N' = K$, где K — тривиальный KG -модуль, то \cup -произведение в кольце когомологий $H^*(G, K) = \bigoplus_{m \geq 0} \text{Ext}_{KG}^m(K, K)$ совпадает с произведением Йонеды.

В настоящей диссертационной работе мы вычисляем алгебры Йонеды алгебр серий $D(3\mathcal{K})$ и $D(3\mathcal{A})_1$. Для серии $D(\mathcal{B})_1$ это сделано А. И. Генераловым [9], и результат, касающийся серии $D(3\mathcal{D})_1$, был также получен А. И. Генераловым (соответствующая публикация подготовлена к печати в журнале “Алгебра и анализ”). Заметим, что Ext-алгебры изучались, в частности, в работах [8, 46, 47, 56]. Чисто техни-

ческие приемы вычисления произведения Йонеды можно найти также в [7, 51].

Поскольку алгебры Йонеды вычислены для всех алгебр диэдрального типа с тремя простыми модулями, реализующихся как блоки, мы можем сформулировать ряд общих результатов относительно блоков с диэдральной дефектной группой и тремя простыми модулями.

Основные результаты диссертации — теоремы 1.1.2 и 1.1.3, которые описывают алгебры Йонеды алгебр серий $D(3\mathcal{K})$ и $D(3\mathcal{A})_1$, соответственно, в терминах алгебр путей некоторых колчанов с соотношениями (см. параграф 1.1).

Отметим, что алгебры Йонеды алгебр всех трех серий $D(3\mathcal{K})$, $D(3\mathcal{A})_1$ (см. теоремы 1.1.2, 1.1.3) и $D(\mathcal{B})_1$ (см. [9]) являются конечнопорожденными градуированными K -алгебрами, и каждая из этих алгебр порождена в степени не выше 3. Данный результат имеет прямую аналогию с теоремой Голода–Венкова–Ивенса, упомянутой выше. Заметим, что случай порожденности алгебры Йонеды в степени 1 рассмотрен И. Грином и Р. Мартинесом-Виллой [46]; А. И. Генералов [8] показал, что алгебры Йонеды полуцепных QF -алгебр порождены в степени не выше 2.

Кроме того, методы, использованные в диссертации при доказательстве теорем 1.1.2 и 1.1.3, позволяют предложить новый подход к вычислению колец когомологий. Так как для всех блоков ручного типа К. Эрдманн вычислила Морита-эквивалентные базисные алге-

бры, то становится возможным описать Ext-алгебры простых модулей над блоками, а также кольца когомологий групповых алгебр ручного типа. В настоящей диссертации это сделано для случая блоков с диэдральной дефектной подгруппой и тремя (попарно неизоморфными) простыми модулями; в частности, удастся описать кольца когомологий проективных специальных линейных групп $\mathrm{PSL}(2, q)$ (q нечетно), а также получить известные соответствующие результаты для знакопеременных групп A_4, A_5, A_6, A_7 (см. следствие 1.1.8).

В настоящей диссертации мы распространяем диаграммный метод Бенсона–Карлсона [28] на случай произвольных конечномерных K -алгебр (см. параграф 1.2), а также предлагаем дальнейшую его разработку (параграфы 1.3, 1.4, 2.2, 2.3) для доказательства основных теорем 1.1.2, 1.1.3 и вытекающих из них следствий. Предложенный в диссертации подход позволяет, в частности, вычислять кольца когомологий групп единообразно, и практически автоматически, если хорошо известны представления соответствующей группы. Заметим также, что изложенный в диссертации метод вычисления алгебр Йонеды алгебр путей колчанов с соотношениями применим не только к алгебрам из классификации К. Эрмманн. В частности, А. И. Генераловым [8] указанный метод был применен для вычисления алгебр Йонеды полуцепных QF -алгебр.

Результаты, выносимые на защиту диссертации:

(1) Вычислены алгебры Йонеды алгебр серий $D(3\mathcal{K})$ и $D(3\mathcal{A})_1$ из классификации К. Эрдманн. Полученный результат завершает вопрос об описании алгебр Йонеды алгебр диэдрального типа с тремя простыми (попарно неизоморфными) модулями, и, в частности, алгебр, реализующихся как блоки групповых алгебр.

(2) Предложен унифицированный метод вычисления колец когомологий групповых алгебр и Ext-алгебр простых модулей блоков ручного типа представлений с использованием алгебр Йонеды.

(3) Получено описание Ext-алгебр простых модулей над блоками с диэдральной дефектной группой и тремя классами изоморфизма простых модулей.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1, 2, 3].

Автор выражает сердечную признательность своему научному руководителю профессору А. И. Генералову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Глава 1

Резольвенты и сизигии

В параграфе 1.1 мы формулируем основные результаты диссертации — теоремы 1.1.2 и 1.1.3, а также следствия из них. Основным следствием теорем 1.1.2 и 1.1.3 является следствие 1.1.8, в котором описаны Ext-алгебры простых модулей над блоками с диэдральной дефектной группой и тремя классами изоморфизма простых модулей.

Остальная часть диссертации посвящена доказательству теорем 1.1.2 и 1.1.3. В параграфе 1.2 мы приводим основные понятия и результаты, касающиеся диаграммного метода Бенсона–Карлсона [28]. Параграфы 1.3 и 1.4 посвящены дальнейшей разработке диаграммного метода и построению минимальных проективных резольвент и сизигий простых модулей. Доказательство теорем 1.1.2 и 1.1.3 будет завершено в главе 2.

1.1. Формулировка основных результатов

Пусть K — произвольное поле. Рассмотрим следующие три серии алгебр, определенных как алгебры путей следующих колчанов с соотношениями (композицию путей мы записываем справа налево).

Алгебры $R_{n_1, n_2, n_3}^{(\mathcal{K})}$ ($n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$):

$$Q^{(\mathcal{K})}: \begin{array}{ccc} & 1 & \\ \alpha_{21} \nearrow & & \nwarrow \alpha_{31} \\ & \alpha_{12} & \alpha_{23} \\ 2 \longleftarrow & & \longrightarrow 3 \\ & \alpha_{32} & \end{array}$$

$$\alpha_{jk}\alpha_{ij} = 0, \quad (\alpha_{ji}\alpha_{ij})^{n_k} = (\alpha_{ki}\alpha_{ik})^{n_j}$$

$$\forall i, j, k : \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}.$$

Алгебры $R_n^{(\mathcal{A})}$ ($n \in \mathbb{N}$):

$$Q^{(\mathcal{A})}: \begin{array}{ccc} & \alpha & \delta \\ 1 \xleftrightarrow{\beta} & 3 & \xleftrightarrow{\gamma} 2 \\ & & \end{array}$$

$$\beta\alpha = \delta\gamma = 0, \quad (\alpha\beta\gamma\delta)^n = (\gamma\delta\alpha\beta)^n.$$

Алгебры $R_{n_1, n_2}^{(\mathcal{B})}$ ($n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 \geq 2$):

$$Q^{(\mathcal{B})}: \varepsilon \begin{array}{ccc} & \alpha & \delta \\ \circlearrowleft & 1 \xleftrightarrow{\beta} 3 & \xleftrightarrow{\gamma} 2 \\ & & \end{array}$$

$$\beta\alpha = \delta\gamma = \alpha\varepsilon = \varepsilon\beta = 0, \quad (\alpha\beta\gamma\delta)^{n_1} = (\gamma\delta\alpha\beta)^{n_1},$$

$$(\beta\gamma\delta\alpha)^{n_1} = \varepsilon^{n_2}.$$

Т. е. алгебра $R_{n_1, n_2, n_3}^{(\mathcal{K})} = K[Q^{(\mathcal{K})}]/I$, где $K[Q^{(\mathcal{K})}]$ — алгебра путей колчана $Q^{(\mathcal{K})}$, а идеал $I = \langle \alpha_{jk}\alpha_{ij}, (\alpha_{ji}\alpha_{ij})^{n_k} - (\alpha_{ki}\alpha_{ik})^{n_j} \mid \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\} \rangle$, и аналогично определяются остальные алгебры.

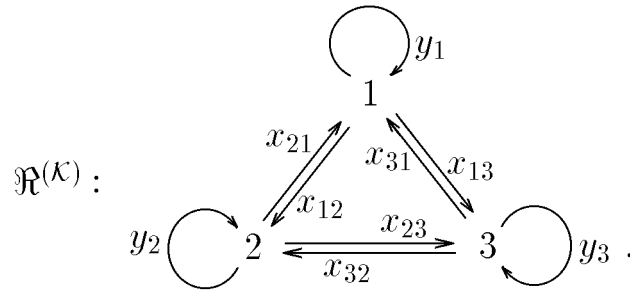
Алгебры $R_{n_1, n_2, n_3}^{(\mathcal{K})}$, $R_n^{(\mathcal{A})}$ и $R_{n_1, n_2}^{(\mathcal{B})}$ представляют собой алгебры серий $D(3\mathcal{K})$, $D(3\mathcal{A})_1$ и $D(3\mathcal{B})_1$ (в обозначениях [40, pp. 294–297]), соответственно, которые были получены К. Эрдманн [40] при решении задачи классификации блоков ручного типа представлений с точностью до Морита-эквивалентности.

Указанные алгебры являются базисными алгебрами диэдрального типа с тремя (попарно неизоморфными) простыми модулями, и каждая из них имеет ручной тип представлений. В частности, все эти алгебры симметричные (и, следовательно, QF -алгебры). Заметим также, что алгебра, определенная колчаном $Q^{(K)}$ с похожими соотношениями, изучалась ранее в [16].

Теорема 1.1.1. (Эрдманн [34, 40]) *Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики два, и пусть B — блок с диэдральной дефектной группой D порядка 2^m ($m \geq 2$), имеющий три (попарно неизоморфных) простых модуля. Обозначим $n = 2^{m-2}$. Тогда блок B Морита-эквивалентен одной из алгебр $R_{1,1,n}^{(K)}$, $R_n^{(A)}$, или $R_{1,n}^{(B)}$.*

В работе [9] А. И. Генераловым были вычислены алгебры Йонеды алгебр серии $D(3\mathcal{B})_1$. В настоящей диссертации мы вычисляем алгебры Йонеды алгебр серий $D(3\mathcal{K})$ и $D(3\mathcal{A})_1$.

Обозначим $R^{(K)} = R_{n_1, n_2, n_3}^{(K)}$, $R^{(A)} = R_n^{(A)}$. Для описания алгебры Йонеды $\mathcal{Y}(R^{(K)})$ алгебры $R^{(K)}$, рассмотрим колчан



На алгебре путей $K[\mathfrak{R}^{(K)}]$ колчана $\mathfrak{R}^{(K)}$ введем градуировку

$$\deg(x_{ij}) = 1, \deg(y_i) = 2 \quad (i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j).$$

Рассмотрим следующие соотношения на колчане $\mathfrak{R}^{(K)}$ (в зависимости от чисел n_i):

$$x_{ji}x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } n_k > 1, \\ \sigma(i, j, k) y_i, & \text{если } n_k = 1 \end{cases} \quad \forall i, j, k: \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}, \quad (1.1)$$

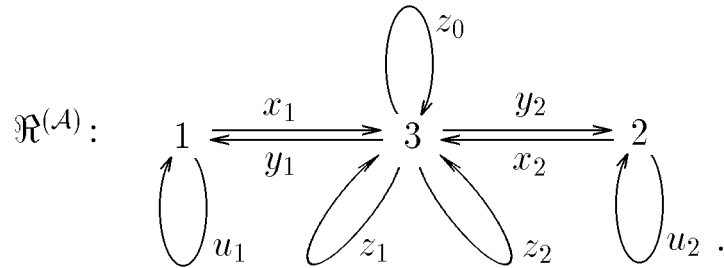
$$y_j x_{ij} = -x_{ij} y_i \quad (i \neq j),$$

где $\sigma(i, j, k) = 1$, если подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$ четная, и $\sigma(i, j, k) = -1$, если эта подстановка нечетная.

Определим алгебру $\mathcal{E}^{(K)} = \mathcal{E}_{n_1, n_2, n_3}^{(K)}$ с помощью колчана $\mathfrak{R}^{(K)}$ и соотношений (1.1). Из вида соотношений (1.1) следует, что алгебра $\mathcal{E}^{(K)}$ наследует градуировку с алгебры $K[\mathfrak{R}^{(K)}]$.

Теорема 1.1.2. Пусть K — произвольное поле, числа $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, и пусть $R^{(K)} = R_{n_1, n_2, n_3}^{(K)}$ и $\mathcal{E}^{(K)} = \mathcal{E}_{n_1, n_2, n_3}^{(K)}$ — определенные выше градуированные K -алгебры. Тогда алгебра Йонеды $\mathcal{Y}(R^{(K)})$ алгебры $R^{(K)}$ изоморфна как градуированная K -алгебра алгебре $\mathcal{E}^{(K)}$.

Для описания алгебры Йонеды $\mathcal{Y}(R^{(A)})$ алгебры $R^{(A)} = R_n^{(A)}$ рассмотрим колчан



На алгебре путей $K[\mathfrak{R}^{(A)}]$ этого колчана введем градуировку

$$\deg(x_i) = \deg(y_i) = 1, \quad \deg(z_i) = \deg(u_i) = 3 \quad (i = 1, 2), \quad \deg(z_0) = 2$$

и рассмотрим следующие соотношения (в зависимости от натурального числа n):

$$\begin{aligned} x_i y_i &= 0, \quad x_i u_i = z_i x_i, \quad u_i y_i = y_i z_i \quad (i = 1, 2), \\ y_i x_j &= z_i x_j = y_i z_j = 0, \quad z_i z_j = -z_j z_i \quad (i \neq j), \\ z_1 z_2 &= \begin{cases} z_0^3, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Определим алгебру $\mathcal{E}^{(A)} = \mathcal{E}_n^{(A)}$ с помощью колчана $\mathfrak{R}^{(A)}$ и соотношений (1.2). Ясно, что алгебра $\mathcal{E}^{(A)}$ наследует градуировку с алгебры $K[\mathfrak{R}^{(A)}]$.

Теорема 1.1.3. Пусть K — произвольное поле, $n \in \mathbb{N}$, и пусть $R^{(A)} = R_n^{(A)}$ и $\mathcal{E}^{(A)} = \mathcal{E}_n^{(A)}$ — определенные выше градуированные K -алгебры. Тогда алгебра Йонеды $\mathcal{Y}(R^{(A)})$ алгебры $R^{(A)}$ изоморфна как градуированная K -алгебра алгебре $\mathcal{E}^{(A)}$.

Замечание 1.1.4. Из вида соотношений (1.1) следует, что если один из индексов $n_i = 1$, то описание алгебры $\mathcal{E}^{(K)}$ можно упростить, опуская в колчане $\mathfrak{R}^{(K)}$ петлю y_i и видоизменяя соответствующим образом соотношения (1.1). Аналогичное замечание применимо к алгебре $\mathcal{E}^{(A)}$.

Заметим также, что алгебры Йонеды алгебр $R_{n_1, n_2, n_3}^{(K)}$ изоморфны друг другу как градуированные K -алгебры, если $n_i > 1$ для всех $i = 1, 2, 3$. Аналогично, алгебры Йонеды алгебр $R_n^{(A)}$ изоморфны друг другу как градуированные K -алгебры, если $n > 1$. Это также видно из соотношений (1.1) и (1.2).

Доказательству теорем 1.1.2 и 1.1.3 целиком посвящены остальные параграфы диссертации. Здесь же мы приведем вытекающие из нее следствия — описание Ext-алгебр простых модулей над рассматриваемыми алгебрами, а также описание колец когомологий некоторых конечных групп.

Рассмотрим градуированные K -алгебры

$$\mathcal{R}_1 = K\langle\beta, \gamma_1, \gamma_2\rangle/(\beta\gamma_1 + \gamma_1\beta, \beta\gamma_2 + \gamma_2\beta, \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_1, \gamma_1\gamma_2 - \beta^3),$$

$$\mathcal{R}_2 = K\langle\beta, \gamma_1, \gamma_2\rangle/(\beta\gamma_1 + \gamma_1\beta, \beta\gamma_2 + \gamma_2\beta, \gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_1, \gamma_1\gamma_2),$$

$$\mathcal{R}_3 = K[\beta, \gamma]/(\beta^2),$$

$$\mathcal{R}_4 = K\langle\alpha, \beta\rangle/(\alpha^2\beta + \beta\alpha^2, \beta^2),$$

$$\mathcal{R}_5 = K\langle\alpha, \beta_1, \beta_2\rangle/(\alpha\beta_1 - \beta_1\alpha, \beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_1, \alpha^2, \beta_1^2),$$

где $\deg(\alpha) = 1$, $\deg(\beta) = \deg(\beta_i) = 2$, $\deg(\gamma) = \deg(\gamma_i) = 3$ ($i = 1, 2$).

Следствие 1.1.5. Пусть S_i , $i = 1, 2, 3$, — простые модули над алгеброй $R^{(K)} = R_{n_1, n_2, n_3}^{(K)}$ ($n_1, n_2, n_3 \geq 1$), соответствующие вершинам колчана $Q^{(K)}$. Тогда Ext-алгебры модулей S_i описываются следующим образом: для любого $i = 1, 2, 3$

$$\mathcal{E}(S_i) \simeq \begin{cases} \mathcal{R}_1, & \text{если } n_1 = n_2 = n_3 = 1, \\ \mathcal{R}_2, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство следствия 1.1.5 приведено в конце параграфа 2.2.

Следствие 1.1.6. Пусть S_i , $i = 1, 2, 3$, — простые модули над алгеброй $R^{(A)} = R_n^{(A)}$ ($n \geq 1$), соответствующие вершинам колчана $Q^{(A)}$.

Тогда

$$\mathcal{E}(S_1) \simeq \mathcal{E}(S_2) \simeq \mathcal{R}_3; \quad \mathcal{E}(S_3) \simeq \begin{cases} \mathcal{R}_1, & \text{если } n = 1, \\ \mathcal{R}_2, & \text{если } n > 1. \end{cases}$$

Доказательство следствия 1.1.6 приведено в конце параграфа 2.3.

Замечание 1.1.7. А. И. Генераловым [9] доказано, что если S_i , $i = 1, 2, 3$, — простые модули над алгеброй $R^{(B)} = R_{n_1, n_2}^{(B)}$ ($n_1 \geq 1, n_2 \geq 2$), соответствующие вершинам колчана $Q^{(B)}$, то

$$\mathcal{E}(S_1) \simeq \begin{cases} \mathcal{R}_4, & \text{если } n_2 = 2, \\ \mathcal{R}_5, & \text{если } n_2 > 2; \end{cases} \quad \mathcal{E}(S_2) \simeq \mathcal{R}_3; \quad \mathcal{E}(S_3) \simeq \mathcal{R}_2.$$

Следствие 1.1.8. Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики два, G — конечная группа, B — блок групповой алгебры KG с диэдральной дефектной группой, имеющий ровно три (попарно неизоморфных) простых модуля. Тогда Ext-алгебра любого простого B -модуля изоморфна как градуированная K -алгебра одной из алгебр

$$\mathcal{A}_1 = K[\beta, \gamma_1, \gamma_2]/(\gamma_1\gamma_2 - \beta^3), \quad \mathcal{A}_2 = K[\beta, \gamma_1, \gamma_2]/(\gamma_1\gamma_2),$$

$$\mathcal{A}_3 = K[\beta, \gamma]/(\beta^2), \quad \mathcal{A}_4 = K[\alpha, \beta]/(\beta^2), \quad \mathcal{A}_5 = K[\alpha, \beta_1, \beta_2]/(\alpha^2, \beta_1^2),$$

где $\deg(\alpha) = 1$, $\deg(\beta) = \deg(\beta_i) = 2$, $\deg(\gamma) = \deg(\gamma_i) = 3$ ($i = 1, 2$).

В частности, мы получаем следующее описание колец когомологий $H^*(G, K)$ некоторых проективных специальных линейных и знакопеременных групп:

$$H^*(\mathrm{PSL}(2, q), K) \simeq \begin{cases} \mathcal{A}_2, & \text{если } q \equiv \pm 1 \pmod{8}, \\ \mathcal{A}_1, & \text{если } q \equiv \pm 3 \pmod{8}; \end{cases}$$

$$H^*(\mathcal{A}_4, K) \simeq H^*(\mathcal{A}_5, K) \simeq \mathcal{A}_1, \quad H^*(\mathcal{A}_6, K) \simeq H^*(\mathcal{A}_7, K) \simeq \mathcal{A}_2.$$

Замечание 1.1.9. Кольца когомологий указанных знакопеременных групп давно известны (см., например, [17, 25]). Для групп $\mathrm{PSL}(2, q)$ при $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ соответствующий результат можно получить из [17, р. 81]. Заметим также, что групповая алгебра KG , $G = \mathrm{PSL}(2, 2^m)$, имеет дикий тип представлений при $m \geq 3$.

Доказательство. Первая часть утверждения непосредственно вытекает из теоремы 1.1.1, следствий 1.1.5, 1.1.6 и замечания 1.1.7.

Далее, пусть $G = \mathrm{PSL}(2, q)$, и пусть 2^m — порядок силовской 2-подгруппы группы G . Если $q \equiv 3 \pmod{4}$, то ввиду [33] главный блок алгебры KG Морита-эквивалентен алгебре $R_{1,1,n}^{(\mathcal{K})}$, где $n = 2^{m-2}$. При этом $m = 2$ для $q \equiv 3 \pmod{8}$ и $m \geq 3$ для $q \equiv 7 \pmod{8}$, и, таким образом, соответствующая часть утверждения вытекает из следствия 1.1.5. Если же $q \equiv 1 \pmod{4}$, то вновь из [33] следует, что главный блок алгебры KG Морита-эквивалентен алгебре $R_n^{(\mathcal{A})}$, где $n = 2^{m-2}$, причем при указанной Морита-эквивалентности тривиальный модуль K переходит в простой модуль S_3 , соответствующий вершине 3 колчана $Q^{(\mathcal{A})}$. При этом $m = 2$ для $q \equiv 5 \pmod{8}$ и $m \geq 3$ для $q \equiv 1 \pmod{8}$, и, таким образом, соответствующая часть утверждения вытекает из следствия 1.1.6.

Группа $A_4 \simeq \mathrm{PSL}(2, 3)$, откуда непосредственно следует $H^*(A_4, K) \simeq \mathcal{A}_1$. Пусть $G = A_5$ или $G = A_6$, и пусть 2^m — порядок силовской 2-подгруппы группы G . Из [34, 40] следует, что главный блок алгебры KG Морита-эквивалентен алгебре $R_n^{(\mathcal{A})}$, где $n = 2^{m-2}$, причем при ука-

занной Морита-эквивалентности тривиальный модуль K переходит в простой модуль S_3 , соответствующий вершине 3 колчана $Q^{(A)}$. Так как $m = 2$, если $G = A_5$, и $m = 3$, если $G = A_6$, то соответствующий результат также вытекает из следствия 1.1.6.

Пусть $G = A_7$. Далее мы приводим рассуждение А. И. Генералова [9]. Главный блок алгебры KG Морита-эквивалентен алгебре $R_{1,2}^{(B)}$ [34], причем при указанной Морита-эквивалентности тривиальный модуль K переходит в простой модуль S_3 , соответствующий вершине 3 колчана $Q^{(A)}$. Таким образом, соответствующий результат вытекает из замечания 1.1.7. \square

Все рассматриваемые модули — левые. Для произвольного модуля M через $Q_\bullet(M) \rightarrow M$ обозначаем его минимальную проективную резольвенту, через $\Omega^m(M)$ — его m -ую сизигию. Напомним, что для модуля M радикал $\text{Rad}^1 M = \text{Rad} M$ — пересечение максимальных подмодулей в M , и $\text{Rad}^{i+1} M = \text{Rad}(\text{Rad}^i M)$ для $i \geq 1$; цоколь $\text{Soc} M$ — подмодуль модуля M , порожденный всеми минимальными подмодулями в M ; и вершина $\text{top} M = M / \text{Rad} M$.

1.2. Диаграммный метод

Определение 1.2.1. [28, 2.1] Пусть Λ — конечномерная K -алгебра. Λ -модульная диаграмма — это пара $D(X, f)$, состоящая из следующих данных:

- (1) X — конечный ориентированный граф с вершинами $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Если в X есть ребро $x_i \rightarrow x_j$, мы обозначим его через $e(x_i, x_j)$. Мы пишем $x_i > x_j$, если в X существует последовательность ребер $x_i = y_0 \rightarrow y_1 \rightarrow \dots \rightarrow y_t = x_j$ ($t > 0$). Граф X должен удовлетворять следующим требованиям:

(1а) X не имеет ориентированных петель и кратных ребер, то есть не существует $x \in X$ такого, что $x > x$, и между любыми двумя вершинами в X существует не более одного ребра;

(1б) Если $x_1, x_2, x_3 \in X$, $x_1 > x_2 > x_3$, то не существует ребра $e(x_1, x_3)$.

(2) Функция f сопоставляет каждой вершине $x \in X$ простой Λ -модуль $f(x)$ и каждому ребру $e(x, y)$ — элемент $f(e(x, y)) \in \text{Ext}_{\Lambda}^1(f(x), f(y))$. Модули $f(x)$ должны быть взяты из фиксированного множества представителей классов изоморфизма простых модулей. Это сопоставление f должно удовлетворять следующим требованиям:

(2а) Предположим, что $x, y_1, \dots, y_t \in X$ и $f(y_1) \simeq \dots \simeq f(y_t) \simeq N$. Если в X есть ребра $e(x, y_i)$, $i = 1, \dots, t$, то элементы $f(e(x, y_i))$ K -линейно независимы в $\text{Ext}_{\Lambda}^1(f(x), N)$.

(2б) Дуально, если имеются ребра $e(y_i, x)$, $i = 1, \dots, t$, то элементы $f(e(y_i, x))$ K -линейно независимы в $\text{Ext}_{\Lambda}^1(N, f(x))$. В частности, для каждого ребра $e(x, y)$ $f(e(x, y)) \neq 0$.

Предположим, что $D(X, f)$ — Λ -модульная диаграмма. Полный подграф U (а также множество его вершин) в X назовем *открытым*, если из $x \in U$, $y < x$ следует $y \in U$ ($\forall x, y \in X$). Очевидно, объедине-

ние и пересечение открытых в X множеств — открытые множества. Дополнение к открытому множеству U — это *замкнутое* множество $U^c = X - U$, состоящее из всех вершин, не принадлежащих U , и всех ребер, соединяющих две вершины, ни одна из которых не принадлежит U . Таким образом, замкнутое множество V должно удовлетворять требованию: $x \in V, x < y \Rightarrow y \in V$. Если U — открытое или замкнутое множество в X , то соответствующую модульную диаграмму $D(U, f|_U)$ мы будем записывать как $D(U, f)$.

Полный подграф U (а также множество его вершин) в X будем называть *поддиаграммой*, если U можно представить как замкнутое подмножество открытого в X множества. Очевидно, поддиаграмму можно представить также и как открытое подмножество замкнутого в X множества. В частности, из $x, z \in U, z < y < x$ следует $y \in U$ ($\forall x, y, z \in X$); открытые и замкнутые в X множества являются его поддиаграммами.

Определение 1.2.2. [28, 2.2] *Представление* для Λ -модульной диаграммы $D(X, f)$ — это Λ -модуль M и функция $U \mapsto M_U$, сопоставляющая открытым множествам в X подмодули в M . Модуль M и функция $U \mapsto M_U$ должны удовлетворять следующим четырем условиям. Пусть U, V, W — открытые множества в X .

$$(1) M_X = M, M_\emptyset = 0, \text{ и } U \subset V \Rightarrow M_U \subset M_V.$$

$$(2) M_{U \cap V} = M_U \cap M_V, M_{U \cup V} = M_U + M_V.$$

(3) Если $V = U \cup \{x\}$, $x \notin U$, то имеется точная последовательность

$$\mathcal{E}_{U,V} \quad : \quad 0 \longrightarrow M_U \xrightarrow{i_{U,V}} M_V \xrightarrow{\lambda_{U,V}} f(x) \longrightarrow 0.$$

Если, кроме того, $W = U \cup \{y\}$, $y \notin U$, $x \neq y$, то $\mathcal{E}_{W,V \cup W} = (i_{U,W})_*(\mathcal{E}_{U,V})$, где $(i_{U,W})_*: \text{Ext}_\Lambda^1(f(x), M_U) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^1(f(x), M_W)$ — гомоморфизм, индуцированный $i_{U,W}$.

(4) Предположим, что $V = U \cup \{x\}$, $W = V \cup \{y\}$, $x \notin U$, $y \notin V$, и существует ребро $e(y, x)$. Тогда $(\lambda_{U,V})_*(\mathcal{E}_{V,W}) = f(e(y, x)) \in \text{Ext}_\Lambda^1(f(y), f(x))$.

Для упрощения формулировок, мы будем говорить также “модуль M имеет диаграмму $D(X, f)$ ”, “ $D(X, f)$ — диаграмма модуля M ”, или “ M — представление для $D(X, f)$ ”, подразумевая под этими фразами “модуль M , вместе с некоторым отображением $U \mapsto M_U$, является представлением для Λ -модульной диаграммы $D(X, f)$ ”.

Диаграммы дают существенную информацию о строении соответствующего модуля. В частности, если M — представление для модульной диаграммы $D(X, f)$, и X имеет n вершин, то композиционная длина M равна n . Более того, если в композиционном ряде для M встречается ровно s факторов, изоморфных данному простому модулю N , то в X имеется ровно s вершин x_1, \dots, x_s таких, что $f(x_i) \simeq N$ [28, 2.4].

Можно эквивалентно определить представление M для $D(X, f)$ в терминах замкнутых множеств в X . А именно, для любого замкнутого

множества W в X существует соответствующий фактормодуль $\overline{M_W}$ и эпиморфизм $\psi_W: M \rightarrow \overline{M_W}$ такие, что будут выполнены требования, дуальные к требованиям (1)–(4) определения 1.2.2. Эквивалентность определений проверяется при переобозначении $M_U = \text{Ker } \psi_W$, где U — дополнение к W , или при переобозначении $\overline{M_W} = M/M_U$, где U — открытое множество, а W — его дополнение [28, 2.5].

Определение 1.2.3. [28, 2.6] Пусть $D(X, f)$ и $D(Y, g)$ — модульные диаграммы. *Изоморфизм диаграмм* $\varphi: D(X, f) \rightarrow D(Y, g)$ — это изоморфизм $\varphi: X \rightarrow Y$ ориентированных графов такой, что $g \circ \varphi = f$ для вершин и ребер. *Гомоморфизм диаграмм* $\varphi: D(X, f) \rightarrow D(Y, g)$ состоит из замкнутого множества $V \subset X$, открытого $U \subset Y$ и изоморфизма диаграмм $\varphi_0: D(V, f) \rightarrow D(U, g)$. *Ядро* φ — диаграмма $D(V^c, f)$, где $V^c = X - V$ — открытое дополнение к V . *Образ* φ — диаграмма $D(U, g)$. Если $W \subset X$ — открытое множество, то пишем $\varphi(W)$ для $\varphi_0(V \cap W)$. Если $S \subset Y$, то пишем $\varphi^{-1}(S)$ для $\varphi_0^{-1}(U \cap S) \cup V^c$.

Предположим, что Λ -модули M и N являются представлениями для диаграмм $D(X, f)$ и $D(Y, g)$ соответственно. Гомоморфизм Λ -модулей $\sigma: M \rightarrow N$ назовем *диаграммным гомоморфизмом*, или *D-гомоморфизмом*, если существует гомоморфизм диаграмм $\varphi: D(X, f) \rightarrow D(Y, g)$ такой, что $\sigma(M_U) = N_{\varphi(U)}$ для любого открытого $U \subset X$.

Если σ и φ такие, как в определении, то $\text{Ker } \sigma = M_{\text{Ker } \varphi}$ и $\text{Im } \sigma = N_{\text{Im } \varphi}$. Кроме того, если W — открытое множество в Y , то $\sigma^{-1}(N_W) = M_{\varphi^{-1}(W)}$ [28, 2.7].

Заметим, что в дальнейшем нам будут встречаться только гомоморфизмы модулей, являющиеся D -гомоморфизмами (для подходящих диаграмм), а гомоморфизмы диаграмм всегда можно будет представить, как D -гомоморфизм модулей. Однако, в общем случае это далеко не всегда выполняется. Опишем теперь один из основных инструментов получения новых диаграмм — слияние.

Определение 1.2.4. [28, 3.4] Предположим, что $D(X, f)$ и $D(Y, g)$ — модульные диаграммы. Пусть $U \subset X$, $V \subset Y$ — открытые множества, и предположим, что существует изоморфизм диаграмм $\varphi: D(U, f) \rightarrow D(V, g)$. *Слияние* $D(X, f) \times_{\varphi} D(Y, g)$ — это диаграмма, которая получается из диаграмм $D(X, f)$ и $D(Y, g)$ при отождествлении $D(U, f)$ и $D(V, g) = \varphi(D(U, f))$. Точнее, это диаграмма $D(Z, h)$, где $Z = (X \cup Y)/(x = \varphi(x))$ и

$$h(z) = \begin{cases} f(z), & z \in X \\ g(z), & z \in Z \end{cases} \quad \text{для вершин и ребер.}$$

Дуально определяется аналогичная конструкция для случая замкнутых множеств $U \subset X$, $V \subset Y$.

Предложение 1.2.5. [28, 3.5] Пусть L , M и N — Λ -модули с диаграммами $D(X, f)$, $D(Y, g)$ и $D(Z, h)$ соответственно. Предположим, что существуют D -гомоморфизмы $\sigma_1: N \rightarrow L$, $\sigma_2: N \rightarrow M$ с соответствующими гомоморфизмами диаграмм

$$\varphi_1: D(Z, h) \rightarrow D(X, f), \quad \varphi_2: D(Z, h) \rightarrow D(Y, g).$$

Определим замкнутые множества

$$U = \varphi_1(Z) - \varphi_1(\text{Ker } \varphi_2) \subset X, \quad V = \varphi_2(Z) - \varphi_2(\text{Ker } \varphi_1) \subset Y,$$

$$W = Z - (\text{Ker } \varphi_1 \cup \text{Ker } \varphi_2) \subset Z.$$

Пусть φ обозначает композицию изоморфизмов

$$D(U, f) \xrightarrow{\varphi_1^{-1}} D(W, h) \xrightarrow{\varphi_2} D(V, g).$$

Тогда коядро отображения $\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} : N \rightarrow L \oplus M$ является представлением для модульной диаграммы

$$D(X - \varphi_1(\text{Ker } \varphi_2), f) \times_{\varphi} D(Y - \varphi_2(\text{Ker } \varphi_1), g).$$

Дуально, пусть $\sigma_1 : M \rightarrow L$, $\sigma_2 : N \rightarrow L$ — D -гомоморфизмы с соответствующими гомоморфизмами диаграмм φ_1, φ_2 . Пусть $W = \text{Im } \varphi_1 \cap \text{Im } \varphi_2$, $U = \varphi_1^{-1}(W) - \text{Ker } \varphi_1$, $V = \varphi_2^{-1}(W) - \text{Ker } \varphi_2$, и пусть гомоморфизм диаграмм φ — композиция $D(U, f) \xrightarrow{\varphi_2^{-1}\varphi_1} D(V, g)$. Тогда ядро отображения $(\sigma_1, \sigma_2) : M \oplus N \rightarrow L$ является представлением для $D(\varphi_1^{-1}(W), f) \times_{\varphi} D(\varphi_2^{-1}(W), g)$.

Определение 1.2.6. [28, 5.1] Говорим, что модульная диаграмма $D(X, f)$ имеет *единственное представление*, если она имеет представление, и любые два представления изоморфны как модули. Если, кроме того, любые два представления D -изоморфны, и соответствующий изоморфизм диаграмм равен тождественному отображению на $D(X, f)$, то говорим, что представление D -*единственное*. Если же

$D(X, f)$ имеет D -единственное представление, и автоморфизмы этого представления являются скалярным умножением на тождественное отображение, то говорим, что представление — *абсолютно D -единственное*.

Назовем модульную диаграмму $D(X, f)$ *цепной*, если вершины X можно проиндексировать (от 1 до n) так, что $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Диаграмму $D(X, f)$ назовем *зигзагом*, если вершины X можно проиндексировать (от 1 до n) так, что для любого $i = 1, \dots, n - 1$ существует ребро $e(x_i, x_{i+1})$ или существует ребро $e(x_{i+1}, x_i)$, и нет других ребер. В частности, зигзаг обязательно связан, и не имеет (по условию (2) определения 1.2.1) автоморфизмов, отличных от тождественного.

Предложение 1.2.7. [28, 6.1] *Пусть все простые Λ -модули абсолютно просты. Тогда*

(1) *зигзаг имеет представление тогда и только тогда, когда каждая его цепная поддиаграмма имеет представление;*

(2) *зигзаг имеет D -единственное представление тогда и только тогда, когда каждая его цепная поддиаграмма имеет единственное представление.*

Определение 1.2.8. [28, 6.4] Модульную диаграмму $D(X, f)$ назовем *жесткой*, если для любого ребра $e(x, y)$ в X размерность $\dim_K \text{Ext}_\Lambda^1(f(x), f(y)) = 1$.

Предложение 1.2.9. [28, 6.5] Пусть $D(X, f)$ и $D(X, f')$ — жесткие зигзаги, причем $f(x) = f'(x)$ для любого $x \in X$. Λ -модуль представляет $D(X, f)$ тогда и только тогда, когда он представляет $D(X, f')$.

Пусть $D(X, f)$ — модульная диаграмма. Определим радикал, цоколь и вершину для X следующим образом:

$$\text{Rad } X = \{x \in X \mid \exists y \in X: y > x\},$$

$$\text{Soc } X = \{x \in X \mid \nexists y \in X: y < x\},$$

$$\text{top } X = X - \text{Rad } X.$$

Т. е. $\text{Soc } X = \{\text{минимальные элементы}\}$ — наибольшее открытое в X множество, не содержащее ребер, $\text{top } X = \{\text{максимальные элементы}\}$ — наибольшее замкнутое множество, не содержащее ребер.

Предложение 1.2.10. [28, 4.1] Предположим, что все простые Λ -модули абсолютно просты. Пусть модуль M — представление для модульной диаграммы $D(X, f)$. Тогда $\text{Rad } M = M_{\text{Rad } X}$, $\text{Soc } M = M_{\text{Soc } X}$, $\text{top } M = M/\text{Rad } M = \overline{M_{\text{top } X}}$.

Для удобства договоримся модульные диаграммы записывать следующим образом. Каждый класс изоморфизма простых модулей мы будем обозначать отдельной буквой (A, B, C, \dots). Иногда будем допускать небольшую вольность речи, обозначая той же буквой также конкретного представителя данного класса. На месте вершины

$x \in X$ в диаграмме $D(X, f)$ пишем букву, обозначающую класс изоморфизма модуля $f(x)$, и около каждой стрелки $e(x_i, x_j)$ пишем элемент $f(e(x_i, x_j)) \in \text{Ext}_R^1(f(x_i), f(x_j))$. Например, запись диаграммы $D(X, f)$

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 & \swarrow \alpha & \\
 & B & \\
 & \swarrow \beta & \\
 D & \xleftarrow{\gamma} & C
 \end{array} \tag{1.3}$$

означает, что $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, в X имеются ребра $x_1 \leftarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$, и других ребер нет, а функция f определена следующим образом: $f(x_1) \simeq A$, $f(x_2) \simeq B$, $f(x_3) \simeq C$, $f(x_4) \simeq D$, $f(e(x_2, x_1)) = \alpha \in \text{Ext}_\Lambda^1(B, A)$, $f(e(x_2, x_3)) = \beta \in \text{Ext}_\Lambda^1(B, C)$, $f(e(x_3, x_4)) = \gamma \in \text{Ext}_\Lambda^1(C, D)$.

Иногда мы также будем записывать диаграммы, рисуя в графе $D(X, f)$ линии вместо стрелок, и направляя их сверху вниз. Например, диаграмма (1.3) может быть изображена также в виде

$$\begin{array}{ccc}
 & B & \\
 & / \alpha \quad \backslash \beta & \\
 A & & C \\
 & & | \gamma \\
 & & D .
 \end{array}$$

Кроме того, иногда при записи модульных диаграмм мы будем опускать значения элементов $f(e(x_i, x_j)) \in \text{Ext}_R^1(f(x_i), f(x_j))$ для упрощения обозначений.

Если M — цепной модуль, то мы будем писать $M = U(M_0, M_1, \dots, M_m)$, где $\text{Rad}^i M / \text{Rad}^{i+1} M = M_i$.

Лемма 1.2.11. Пусть Λ — конечномерная K -алгебра, M — цепной Λ -модуль, $M = U(M_0, M_1, \dots, M_m)$. Тогда M имеет цепную Λ -модульную диаграмму

$$M_m \leftarrow M_{m-1} \leftarrow \dots \leftarrow M_1 \leftarrow M_0.$$

Доказательство. Покажем, что модуль M является представлением для модульной диаграммы $D(X, f)$, с графом $X: x_m \leftarrow x_{m-1} \leftarrow \dots \leftarrow x_1 \leftarrow x_0$ и функцией f , определенной следующим образом: $f(x_i) = M_i = \text{Rad}^i M / \text{Rad}^{i+1} M$, и значение $f(e(x_i, x_{i+1})) \in \text{Ext}_\Lambda^1(M_i, M_{i+1})$ функции f на ребре $e(x_i, x_{i+1})$ представлено короткой точной последовательностью

$$0 \rightarrow \text{Rad}^{i+1} M / \text{Rad}^{i+2} M \rightarrow \text{Rad}^i M / \text{Rad}^{i+2} M \rightarrow \text{Rad}^i M / \text{Rad}^{i+1} M \rightarrow 0.$$

Очевидно, таким образом определенные граф X и функция f удовлетворяют определению 1.2.1, и, следовательно, $D(X, f)$ является Λ -модульной диаграммой.

Далее, определим функцию $U \mapsto M_U$ из определения 1.2.2 следующим образом. Если U — открытое множество в X , $U = \{x_m, x_{m-1}, \dots, x_i\}$, то $M_U = \text{Rad}^i M$. Справедливость условий 1.2.2(1) и 1.2.2(2) очевидна. Проверим условие 1.2.2(3). Пусть x, U и V — такие, как в условии (3), $U = \{x_m, x_{m-1}, \dots, x_i\}$, $x = x_{i-1}$, $V = U \cup \{x\} = \{x_m, x_{m-1}, \dots, x_i, x_{i-1}\}$, $M_U = \text{Rad}^i M$, $M_V = \text{Rad}^{i-1} M$. Тогда имеется короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Rad}^i M \xrightarrow{i_{U,V}} \text{Rad}^{i-1} M \xrightarrow{\lambda_{U,V}} M_{i-1} \longrightarrow 0.$$

Из диаграммы $D(X, f)$ видно, что в данном случае не существует такого подмножества W , как в условии 1.2.2(3).

Для завершения доказательства, нам осталось проверить условие 1.2.2(4). Пусть U, V, W — такие, как в условии; $U = \{x_m, \dots, x_{i+1}\}$, $V = \{x_m, \dots, x_i\}$, $W = \{x_m, \dots, x_{i-1}\}$. Тогда имеется коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
& \text{Rad}^{i+1} M & \xlongequal{\quad} & \text{Rad}^{i+1} M & & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
0 & \longrightarrow & \text{Rad}^i M & \longrightarrow & \text{Rad}^{i-1} M & \xrightarrow{\lambda_{V,W}} & M_{i-1} \longrightarrow 0 \\
& & \lambda_{U,V} \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & M_i & \longrightarrow & \text{Rad}^{i-1} M / \text{Rad}^{i+1} M & \longrightarrow & M_{i-1} \longrightarrow 0, \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

и нижняя строка этой диаграммы представляет элемент $f(e(x_{i-1}, x_i)) \in \text{Ext}_{\Lambda}^1(M_{i-1}, M_i)$. \square

1.3. Серия $D(3\mathcal{K})$

В настоящем параграфе $R = R^{(\mathcal{K})} = R_{n_1, n_2, n_3}^{(\mathcal{K})}$ ($n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$) — алгебра, определенная в параграфе 1.1. Пусть e_i , $i = 1, 2, 3$, — идемпотенты алгебры R , соответствующие вершинам колчана $Q^{(\mathcal{K})}$. Через $P_i = Re_i$, $i = 1, 2, 3$, мы обозначим проективные неразложимые модули алгебры R . Заметим, что алгебра R — симметричная, и обозначим через $S_i = \text{Soc } P_i \simeq \text{top } P_i$, $i = 1, 2, 3$, простые R -модули (соответствующие

вершинам колчана $Q^{(K)}$). Мы построим минимальные проективные резольвенты и сизигии модулей S_i (теоремы 1.3.7 и 1.3.13, соответственно), используя диаграммный метод Бенсона–Карлсона [28].

Элементы α_{ij} алгебры R (соответствующие стрелкам колчана $Q^{(K)}$) мы будем называть буквами, а произведения букв — словами. При этом количество букв в слове мы будем называть его длиной, и будем считать, что идемпотенты e_1, e_2, e_3 — слова нулевой длины. Из соотношений, определяющих алгебру R , легко выписать все ненулевые слова (порождающие R как K -линейное пространство). Например, слова, порождающие $P_1 = Re_1$ — это слова

$$\begin{aligned} e_1, \alpha_{12}, \alpha_{21}\alpha_{12}, \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{12}, \dots, \alpha_{12}(\alpha_{21}\alpha_{12})^{n_3-1}, (\alpha_{21}\alpha_{12})^{n_3}, \\ \alpha_{13}, \alpha_{31}\alpha_{13}, \alpha_{13}\alpha_{31}\alpha_{13}, \dots, \alpha_{13}(\alpha_{31}\alpha_{13})^{n_2-1}, (\alpha_{31}\alpha_{13})^{n_2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

(при этом $(\alpha_{21}\alpha_{12})^{n_3} = (\alpha_{31}\alpha_{13})^{n_2}$). Слова, порождающие $P_2 = Re_2$ и $P_3 = Re_3$, выписываются аналогично (1.4), с соответствующей заменой индексов. Введем сокращенные обозначения для следующих слов:

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= \alpha_{ij}(\alpha_{ji}\alpha_{ij})^{n_k-1} = (\alpha_{ij}\alpha_{ji})^{n_k-1}\alpha_{ij}, \\ s_i &= \alpha_{ji}\beta_{ij} = \beta_{ji}\alpha_{ij} = (\alpha_{ji}\alpha_{ij})^{n_k} \end{aligned}$$

(где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, и при $n_k = 1$ в качестве элемента $(\alpha_{ji}\alpha_{ij})^0$ берется идемпотент e_i , соответствующий вершине i).

Лемма 1.3.1. Пусть y и $\alpha_{ij}y$ — ненулевые слова ненулевой длины.

Тогда $\text{Rad } Ry = R\alpha_{ij}y$, и $Ry/R\alpha_{ij}y \simeq S_i$.

Доказательство. Не умаляя общности, считаем, что $i = 1, j = 2$.

Тогда либо (а) $y = y'\alpha_{12}$, либо (б) $y = y'\alpha_{21}$, где y' — некоторое слово.

Рассмотрим случай (а). Заметим, что как K -линейное пространство, $Ry = \langle y, \alpha_{12}y, \alpha_{21}\alpha_{12}y, \dots, \beta_{12}, s_1 \rangle$, и $\text{Soc } Ry = Rs_1 = S_1$. Если $y = \beta_{12}$, то $\alpha_{12}y = \alpha_{12}\beta_{12} = s_1$, и утверждение очевидно. Пусть $y \neq \beta_{12}$. Тогда рассмотрим отображение $\alpha_{21}^*: Ry \rightarrow Ry\alpha_{21}$, $\alpha_{21}^*(x) = x\alpha_{21}$. Заметим, что $\alpha_{21}^*(Ry) = Ry\alpha_{21}$, $\alpha_{21}^*(R\alpha_{12}y) = R\alpha_{12}y\alpha_{21}$, и по предположению индукции можно считать, что $\text{Rad } Ry\alpha_{21} = R\alpha_{12}y\alpha_{21}$. Поскольку $\text{Ker } \alpha_{21}^* = Rs_1 = S_1 = \text{Soc } Ry$, то осталось совершить индукционный переход. Случай (б) рассматривается аналогично.

Теперь докажем вторую часть леммы. Заметим, что так как $\alpha_{12}y \neq 0$, то $e_1y = y$, $e_2y = e_3y = 0$, и умножение на элементы α_{ij} ($i \neq j$) и e_i ($i = 1, 2, 3$) алгебры R в модуле $Ry/R\alpha_{12}y = \{ky + R\alpha_{12}y : k \in K\}$ совпадает с умножением в $S_1 = Rs_1$, откуда $Ry/R\alpha_{12}y \simeq S_1$. \square

Про алгебру R и модули P_i известно следующее предложение и следствие из него (см. [34, 4.4, 6.3]).

Предложение 1.3.2. Пусть $R = R^{(K)} = R_{n_1, n_2, n_3}^{(K)}$ — алгебра, определенная в параграфе 1.1; $P_i = Re_i$, $i = 1, 2, 3$, — неразложимые проективные модули алгебры R , соответствующие вершинам колчана $Q^{(K)}$.

$$(1) \text{Rad } P_i/S_i = M_i \oplus N_i, \text{ где}$$

$$M_1 = U(S_2, S_1, S_2, S_1, S_2, \dots, S_2), \quad N_1 = U(S_3, S_1, S_3, S_1, S_3, \dots, S_3),$$

$$M_2 = U(S_3, S_2, S_3, S_2, S_3, \dots, S_3), \quad N_2 = U(S_1, S_2, S_1, S_2, S_1, \dots, S_1),$$

$$M_3 = U(S_1, S_3, S_1, S_3, S_1, \dots, S_1), \quad N_3 = U(S_2, S_3, S_2, S_3, S_2, \dots, S_2).$$

Более того,

$$\text{Rad } M_1 \simeq N_2/S_1, \quad \text{Rad } M_2 \simeq N_3/S_2, \quad \text{Rad } M_3 \simeq N_1/S_3,$$

$$\text{Rad } N_1 \simeq M_3/S_1, \quad \text{Rad } N_2 \simeq M_1/S_2, \quad \text{Rad } N_3 \simeq M_2/S_3.$$

(2) Матрица Картана алгебры R равна

$$\begin{pmatrix} n_2 + n_3 & n_3 & n_2 \\ n_3 & n_1 + n_3 & n_1 \\ n_2 & n_1 & n_1 + n_2 \end{pmatrix}.$$

Следствие 1.3.3. Для любых $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$\dim_K \text{Ext}_R^1(S_i, S_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \neq j, \\ 0, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Из леммы 1.3.1, предложения 1.3.2 и следствия 1.3.3 легко заметить, что стрелкам α_{ij} колчана $Q^{(\mathcal{K})}$ соответствуют элементы группы $\text{Ext}_R^1(S_i, S_j)$, в следующем смысле. Если y и $\alpha_{ij}y$ — ненулевые слова ненулевой длины, то из леммы 1.3.1 следует, что модуль Ry — цепной, и по лемме 1.2.11 имеет диаграмму

$$S_c \leftarrow \cdots \leftarrow S_j \leftarrow S_i,$$

причем открытое подмножество $S_c \leftarrow \cdots \leftarrow S_j$ этой диграммы представимо модулем $R\alpha_{ij}y$. (Более полное описание взаимосвязи фробениусовых алгебр и их колчанов, можно найти в [45]). В частности, имеется короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow R\alpha_{ij}y / \text{Rad } R\alpha_{ij}y \rightarrow Ry / \text{Rad } R\alpha_{ij}y \rightarrow Ry / R\alpha_{ij}y \rightarrow 0,$$

представляющая элемент группы расширений $\text{Ext}_R^1(S_i, S_j)$, определенный с точностью до умножения на скаляр из поля K . Мы зафиксируем произвольные ненулевые элементы групп расширений $\text{Ext}_R^1(S_i, S_j)$ ($i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$), и будем в дальнейшем обозначать их также через α_{ij} .

Лемма 1.3.4. *Модуль P_1 имеет диаграмму*

$$\begin{array}{ccc}
 & S_1 & \\
 & / \alpha_{12} \quad \backslash \alpha_{13} & \\
 S_2 & & S_3 \\
 | \alpha_{21} & & | \alpha_{31} \\
 S_1 & & S_1 \\
 | \alpha_{12} & & | \alpha_{13} \\
 \vdots & & \vdots \\
 | \alpha_{12} & & | \alpha_{13} \\
 S_2 & & S_3 \\
 \alpha_{21} \backslash & & / \alpha_{31} \\
 & S_1 &
 \end{array} \tag{1.5}$$

с n_3 вершинами S_2 , n_2 вершинами S_3 , и $n_2 + n_3$ вершинами S_1 . В частности, композиционная длина модуля P_1 равна $2(n_2 + n_3)$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что диаграмма (1.5) действительно является R -модульной диаграммой, поскольку для нее, очевидно, выполнены условия определения 1.2.1.

Обозначим $P = P_1$. Так как $\text{Rad } P / \text{Soc } P = M_1 \oplus N_1$, где M_1 и N_1 — цепные модули из предложения 1.3.2, то существуют цепные модули $M'_1 = U(S_2, S_1, S_2, S_1, S_2, \dots, S_2, S_1)$ и $N'_1 = U(S_3, S_1, S_3, S_1, S_3, \dots, S_3, S_1)$ такие, что $\text{Rad } P = M'_1 + N'_1$, причем $S_1 = M'_1 \cap N'_1$, $M'_1/S_1 = M_1$,

$N'_1/S_1 = N_1$, $\text{Rad } P/N'_1 = (M'_1 + N'_1)/N'_1 = M'_1/(M'_1 \cap N'_1) = M_1$. Из леммы 1.2.11, с учетом леммы 1.3.3, следует, что модули M'_1 и N'_1 имеют R -модульные диаграммы, соответственно:

$$\begin{aligned} S_1 &\xleftarrow{\alpha_{21}} S_2 \xleftarrow{\alpha_{12}} S_1 \xleftarrow{\alpha_{21}} S_2 \xleftarrow{\alpha_{12}} \dots \xleftarrow{\alpha_{12}} S_1 \xleftarrow{\alpha_{21}} S_2, \\ S_1 &\xleftarrow{\alpha_{31}} S_3 \xleftarrow{\alpha_{13}} S_1 \xleftarrow{\alpha_{31}} S_3 \xleftarrow{\alpha_{13}} \dots \xleftarrow{\alpha_{13}} S_1 \xleftarrow{\alpha_{31}} S_3. \end{aligned}$$

Далее, рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_1 & \xrightarrow{-\sigma_1} & M'_1 & \longrightarrow & M_1 \longrightarrow 0 \\ & & \sigma_2 \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & N'_1 & \longrightarrow & \text{Rad } P & \longrightarrow & M_1 \longrightarrow 0. \end{array}$$

Так как квадрат, содержащий отображения $-\sigma_1$ и σ_2 , биуниверсален, то $\text{Rad } P \simeq \text{Coker} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} : S_1 \rightarrow M'_1 \oplus N'_1$ — отображение, определенное следующим образом: $\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} (x) = \sigma_1(x) \oplus \sigma_2(x) \in M'_1 \oplus N'_1$. Из предложения 1.2.5 следует, что диаграмма модуля $\text{Rad } P$ получается из диаграмм модулей M'_1 и N'_1 при помощи отождествления вершин S_1 в их цоколях. С учетом предложения 1.3.2(2), мы получаем, что модуль $\text{Rad } P$ имеет диаграмму $D(\text{Rad } X, f)$, где $D(X, f)$ — диаграмма (1.5). Соответствующее отображение $\Phi' : U \mapsto (\text{Rad } P)_U$, переводящее открытые подмножества $U \subset \text{Rad } X$ в подмодули $(\text{Rad } P)_U \subset \text{Rad } P$, мы продолжим до отображения Φ , действующего на всех открытых подмножествах X , положив $\Phi(X) = P$.

Для завершения доказательства осталось показать, что модуль P вместе с только что определенным отображением $\Phi : U \mapsto P_U = \Phi(U)$ является представлением для диаграммы $D(X, f)$. Условия (1) и (2)

определения 1.2.2, очевидно, выполнены. Проверим условие 1.2.2(3). Пусть U и V — такие, как в условии. Если $V \subset \text{Rad } X$, то наличие необходимой короткой точной последовательности следует из того, что $\text{Rad } P$ имеет диаграмму $D(\text{Rad } X, f)$. Пусть $V = X$. Тогда $U = \text{Rad } X$, и имеется короткая точная последовательность

$$\mathcal{E}_{U,V}: 0 \rightarrow \text{Rad } P \rightarrow P \rightarrow S_1 \rightarrow 0.$$

Из диаграммы (1.5) видно, что если W — такое, как в условии 1.2.2(3), то $V, W \subset \text{Rad } X$, и необходимое равенство опять следует из того, что $\text{Rad } P$ имеет диаграмму $D(\text{Rad } X, f)$.

Пусть теперь x, y, U, V, W — такие, как в условии 1.2.2(4). Если $W \subset \text{Rad } X$, то можно опять сослаться на диаграмму $D(\text{Rad } X, f)$. Пусть $W = X$. Тогда $f(y) = S_1$, $P_V = \text{Rad } P$, и, не умаляя общности, $f(x) = S_2$, $f(e(y, x)) = \alpha_{12}$, $P_U = \text{Rad } M'_1 + N'_1$. Тогда имеется коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \text{Rad } M'_1 + N'_1 & \xlongequal{\quad} & \text{Rad } M'_1 + N'_1 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Rad } P & \longrightarrow & P & \xrightarrow{\lambda_{V,W}} & S_1 \longrightarrow 0 \\ & & \lambda_{U,V} \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & S_2 & \longrightarrow & P/(\text{Rad } M'_1 + N'_1) & \longrightarrow & S_1 \longrightarrow 0, \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

в которой нижняя строка представляет элемент $f(e(y, x)) = \alpha_{12} \in$

$\text{Ext}_R^1(S_1, S_2)$ (поскольку отображение $\lambda_{U,V}$ в этой диаграмме можно соответствующим образом “подправить” на скаляр из K , так что все предыдущие рассуждения останутся в силе). \square

Замечание 1.3.5. Поскольку определение алгебр $R = R^{(K)} = R_{n_1, n_2, n_3}^{(K)}$ и $\mathcal{E}^{(K)} = \mathcal{E}_{n_1, n_2, n_3}^{(K)}$ не изменяется при четных подстановках вершин 1, 2, 3, то в дальнейшем мы условимся применять четные подстановки вершин (или индексов) для определения аналогичных объектов. Например, диаграмма модуля P_2 (соответственно P_3) получается из диаграммы (1.5) с помощью применения цикла (123) (соответственно (132)) к индексам 1, 2, 3 и соответствующего изменения количества вершин в диаграмме.

Замечание 1.3.6. Диаграмма (1.5) модуля P_1 имеет тесную взаимосвязь со словами (1.4), порождающим $P_1 = Re_1$ как K -линейное пространство. Обозначим диаграмму (1.5) через $D(X, f)$. Тогда, если мы спустимся в диаграмме $D(X, f)$ по стрелкам с вершины $\text{top } X$ до некоторой другой вершины графа X , записывая встречающиеся буквы справа налево, то мы получим некоторое ненулевое слово ненулевой длины из (1.4). Кроме того, любое ненулевое слово из (1.4), кроме e_1 , может быть “прочитано” в диаграмме $D(X, f)$ подобным образом. В частности, слова $(\alpha_{21}\alpha_{12})^{n_3}$ и $(\alpha_{31}\alpha_{13})^{n_2}$ получаются при проходе в графе X с вершины $\text{top } X$ до вершины $\text{Soc } X$ по “левой” и по “правой” стороне, соответственно (заметим, что $(\alpha_{21}\alpha_{12})^{n_3} = (\alpha_{31}\alpha_{13})^{n_2} = s_1$ — ненулевые слова максимальной возможной длины, начинающиеся спра-

ва с букв α_{12} и α_{13} , соответственно). Аналогичное замечание применимо к диаграммам модулей P_2 и P_3 .

Рассмотрим гомоморфизмы умножения справа на элементы α_{ij}, β_{ij} , действующие между модулями P_k , $\alpha_{ij}^*, \beta_{ij}^*: P_j \rightarrow P_i$. В дальнейшем ради простоты обозначений мы будем обозначать гомоморфизм умножения справа на элемент $x \in R$ также через x .

Теорема 1.3.7. *Минимальная проективная резольвента модуля S_1 совпадает с тотализацией бикомплекса*

$$\begin{array}{cccc}
 \downarrow \alpha_{13} & \downarrow \alpha_{21} & \downarrow \alpha_{32} & \downarrow \alpha_{13} \\
 P_1 \xleftarrow{-\beta_{12}} & P_2 \xleftarrow{-\beta_{23}} & P_3 \xleftarrow{-\beta_{31}} & P_1 \xleftarrow{-\alpha_{12}} \\
 \downarrow \alpha_{21} & \downarrow \alpha_{32} & \downarrow \alpha_{13} & \downarrow \beta_{21} \\
 P_2 \xleftarrow{\beta_{23}} & P_3 \xleftarrow{\beta_{31}} & P_1 \xleftarrow{\alpha_{12}} & P_2 \xleftarrow{\alpha_{23}} \\
 \downarrow \alpha_{32} & \downarrow \alpha_{13} & \downarrow \beta_{21} & \downarrow \beta_{32} \\
 P_3 \xleftarrow{-\beta_{31}} & P_1 \xleftarrow{-\alpha_{12}} & P_2 \xleftarrow{-\alpha_{23}} & P_3 \xleftarrow{-\alpha_{31}} \\
 \downarrow \alpha_{13} & \downarrow \beta_{21} & \downarrow \beta_{32} & \downarrow \beta_{13} \\
 P_1 \xleftarrow{\alpha_{12}} & P_2 \xleftarrow{\alpha_{23}} & P_3 \xleftarrow{\alpha_{31}} & P_1 \xleftarrow{\alpha_{12}} .
 \end{array} \tag{1.6}$$

Замечание 1.3.8. Минимальная проективная резольвента модуля S_2 (соответственно S_3) совпадает с тотализацией аналогичного бикомплекса, который получается (в соответствии с принятым соглашением) из бикомплекса (1.6) применением к индексам 1, 2, 3 цикла (123) (соответственно (132)).

Замечание 1.3.9. Пусть $B_{\bullet\bullet}$ — бикомплекс (1.6) или аналогичный бикомплекс для модуля S_2 или S_3 (полученный из (1.6) применением

четной подстановки индексов $1, 2, 3$). В дальнейшем мы всегда будем использовать упорядочение прямых слагаемых в разложении $Q_m(S_k) = \bigoplus_{i+j=m} B_{ij}$ по возрастанию второго индекса. Например, $Q_3(S_1) = P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \oplus P_1$. В соответствии с этим упорядочиваем также прямые слагаемые модуля $\text{top } \Omega^m(S_k) \simeq \text{top } Q_m(S_k)$. Если $\pi: \text{top } \Omega^m(S_k) \rightarrow S_t$ — каноническая проекция на некоторое прямое слагаемое, то композиция π с каноническим эпиморфизмом $\Omega^m(S_k) \rightarrow \text{top } \Omega^m(S_k)$ называется каноническим отображением.

Дифференциалы в минимальной проективной резольвенте модуля S_i , $i = 1, 2, 3$, в дальнейшем будем обозначать через $d_m^{(i)}$, $m \geq 0$.

Для доказательства теоремы 1.3.7 нам потребуется несколько вспомогательных утверждений. Кроме того, мы будем применять следующую запись для диаграмм, являющихся зигзагами. Если $D(X, f)$ — зигзаг (ребра которого помечены буквами α_{ij} , $i \neq j$), то максимальные подпоследовательности одинаково ориентированных ребер будем заменять одной чертой, которая помечается соответствующим словом (при этом при движении сверху вниз по зигзагу $D(X, f)$ соответствующие буквы записываем справа налево). Например, диаграмму модуля $\text{Rad } P_1$ (ввиду следствия 1.3.4 и предложения 1.2.10) можно записать как

$$\begin{array}{ccc} S_2 & & S_3 \\ & \searrow \beta_{21} & / \beta_{31} \\ & S_1 & . \end{array}$$

Лемма 1.3.10. *Если R -модульная диаграмма является зигзагом и имеет представление, то она имеет D -единственное представление.*

Доказательство. Пусть $D(Y, g)$ — зигзаг, имеющий представление.

Ввиду предложения 1.2.7, достаточно доказать, что любая цепная поддиаграмма $D(X, f)$

$$S_i \leftarrow \cdots \leftarrow S_j \leftarrow S_k$$

диаграммы $D(Y, g)$ имеет единственное представление. Пусть M и M' — два представления для диаграммы $D(X, f)$. Поскольку $\text{Soc } M \simeq \text{Soc } M' \simeq S_i$, то модули M и M' вкладываются в P_i (так как R — симметричная алгебра, и проективные модули P_1, P_2 и P_3 одновременно являются инъективными). Поэтому можно считать, что $M, M' \subset \text{Rad } P_i \subset P_i$. Докажем, что $M \simeq M'$. По предположению индукции можно считать, что имеется изоморфизм $\sigma_0: \text{Rad } M \rightarrow \text{Rad } M'$. Так как P_i инъективен, то существует гомоморфизм $\sigma: P_i \rightarrow P_i$ такой, что $\sigma|_{\text{Rad } M} = \sigma_0$. Так как $\text{Rad } M$ — существенный подмодуль в P_i , то σ — мономорфизм, а следовательно, и изоморфизм. Докажем, что $\sigma(M) = M'$. Заменяя M на $\sigma(M)$, можем считать, что $\text{Rad } M = \text{Rad } M'$. Предположим, что $M \neq M'$. Рассмотрим модуль $L = (M + M') / \text{Rad}^2 M$ композиционной длины три. Тогда $\text{Soc } L = \text{Rad } L \simeq \text{Rad } M / \text{Rad}^2 M \simeq S_j$, и L вкладывается в P_j . Тогда модуль $\text{Soc}(L / \text{Soc } L) \simeq \text{top } L \simeq \text{top } M \oplus \text{top } M' \simeq S_k \oplus S_k$ должен вкладываться в $\text{Soc}(P_j / \text{Soc } P_j) \simeq S_c \oplus S_d$, где $\{c, d, j\} = \{1, 2, 3\}$, чего не может быть. \square

Лемма 1.3.11. Пусть x и y — ненулевые слова ненулевой длины такие, что $x \in e_i R e_j$, $y \in e_j R e_i$, и $xy = s_i$; M — подмодуль модуля $P_i = R e_i$. Тогда

$$M \text{ имеет диаграмму } \begin{array}{c} S_j \\ \searrow_x \\ S_i \end{array} \iff M \simeq R y.$$

Доказательство. Ввиду леммы 1.3.10, достаточно доказать, что модуль Ry имеет указанную диаграмму. Пусть $i = 1$, $j = 2$. Тогда $x = \alpha_{21}\alpha_{12} \dots \alpha_{12}\alpha_{21}$, $y = \alpha_{12}\alpha_{21} \dots \alpha_{21}\alpha_{12}$, $xy = s_1$. Ввиду леммы 1.2.11, предложения 1.2.9 и леммы 1.3.1, модуль Ry имеет диаграмму

$$S_1 \xleftarrow{\alpha_{21}} S_2 \xleftarrow{\alpha_{12}} S_1 \xleftarrow{\alpha_{21}} \dots \xleftarrow{\alpha_{21}} S_2 \xleftarrow{\alpha_{12}} S_1 \xleftarrow{\alpha_{21}} S_2, \quad (1.7)$$

причем количество вершин в этой диаграмме равно композиционной длине модуля Ry . Заметим, что модуль Ry имеет композиционный ряд

$$R s_1 \subset R \beta_{12} \subset \dots \subset R \alpha_{12} \alpha_{21} y \subset R \alpha_{21} y \subset R y.$$

Таким образом, количество стрелок в (1.7) в точности равняется длине слова x , и слово, прочитанное по стрелкам в (1.7) справа налево, в точности совпадает с x . Остальные возможные случаи в этом рассуждении рассматриваются аналогично. \square

Лемма 1.3.12. Пусть $D(X, f)$ — представимая R -модульная диаграмма вида

$$\begin{array}{c} S_i \\ \searrow_x \\ S_j \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{c} S_i \\ \nearrow_{x_1} \quad \searrow_{x_2} \\ S_k \quad S_j \end{array},$$

где x, x_1, x_2 — ненулевые слова ненулевой длины, причем $x, x_1, x_2 \neq s_m$ ($\forall m = 1, 2, 3$). Тогда в диаграмме модуля P_i имеется замкнутое подмножество, изоморфное X .

Доказательство. Если $D(X, f)$ — цепная диаграмма, то соответствующая часть утверждения вытекает непосредственно из замечания 1.3.6.

Пусть $D(X, f)$ — диаграмма вида $S_k \leftarrow \cdots \leftarrow S_l \leftarrow S_i \rightarrow S_{l'} \rightarrow \cdots \rightarrow S_j$ ($i, j, k, l, l' \in \{1, 2, 3\}$). Ввиду замечания 1.3.6, достаточно доказать, что $l \neq l'$, т. е. что слова x_1 и x_2 начинаются справа на разные буквы. Если $l = l'$, то имеется модуль с диаграммой вида $S_l \leftarrow S_i \rightarrow S_l$, являющийся фактормодулем P_i , и тогда $S_l \oplus S_l \subset \text{Rad } P_i / \text{Rad}^2 P_i$, что невозможно. \square

Теперь мы опишем процедуру построения сизигий для модулей, диаграммы которых являются зигзагами. При этом, мы получим также вид дифференциалов в минимальной проективной резольвенте рассматриваемого модуля.

Пусть M — R -модуль с диаграммой $D(X, f)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 S_{i_3} & & S_{i_5} & & S_{i_{m-4}} & & S_{i_{m-2}} \\
 & \searrow x_3 & / x_4 & \searrow x_5 & / x_{m-5} & \searrow x_{m-4} & / x_{m-3} \\
 & & S_{i_4} & & \cdots & & S_{i_{m-3}}
 \end{array}, \tag{1.8}$$

где x_j , $j = 3, \dots, m-3$, — ненулевые слова ненулевой длины такие, что $x_j \neq s_k \forall k = 1, 2, 3$. Заметим, что ввиду леммы 1.3.10, диаграмма (1.8) имеет D -единственное представление, и, следовательно,

определяет модуль M с точностью до изоморфизма (и даже с точностью до D -изоморфизма). Из диграммы (1.8) мы видим, что $\text{top } M = S_{i_3} \oplus S_{i_5} \oplus \cdots \oplus S_{i_{m-4}} \oplus S_{i_{m-2}}$, и, следовательно, проективное накрытие модуля M равно $Q_0(M) = P_{i_3} \oplus P_{i_5} \oplus \cdots \oplus P_{i_{m-4}} \oplus P_{i_{m-2}}$. Рассмотрим в диграмме (1.8) открытые подмножества

$$\begin{array}{cccc} S_{i_3} & & S_{i_5} & & S_{i_{m-4}} & & S_{i_{m-2}} \\ & \searrow x_3 & & \swarrow x_4 & & \searrow x_{m-5} & & \swarrow x_{m-4} & & \swarrow x_{m-3} \\ & & S_{i_4}, S_{i_4} & & S_{i_6}, \dots, S_{i_{m-5}} & & S_{i_{m-3}}, S_{i_{m-3}} & & & \end{array} \quad (1.9)$$

которые мы обозначим через $U_3, U_5, \dots, U_{m-4}, U_{m-2}$, соответственно.

Заметим, что $U_3 \cup U_5 \cup \cdots \cup U_{m-4} \cup U_{m-2} = X$.

По лемме 1.3.12 в диграммах $D(Y_3, g_3), D(Y_5, g_5), \dots, D(Y_{m-4}, g_{m-4}), D(Y_{m-2}, g_{m-2})$ модулей $P_{i_3}, P_{i_5}, \dots, P_{i_{m-4}}, P_{i_{m-2}}$ (каждая из которых равняется диграмме (1.5) или аналогичной диграмме модуля P_2 или P_3) имеются замкнутые поддиграммы $U'_3, U'_5, \dots, U'_{m-4}, U'_{m-2}$, изоморфные $U_3, U_5, \dots, U_{m-4}, U_{m-2}$, соответственно. Рассмотрим эпиморфизм

$$\sigma = (\sigma_3, \sigma_5, \dots, \sigma_{m-4}, \sigma_{m-2}): Q_0(M) = P_{i_3} \oplus P_{i_5} \oplus \cdots \oplus P_{i_{m-4}} \oplus P_{i_{m-2}} \rightarrow M$$

такой, что отображение диграмм $\varphi_j: D(Y_j, g_j) \rightarrow D(X, f)$, соответствующее гомоморфизму $\sigma_j: P_{i_j} \rightarrow M$ ($j = 3, 5, \dots, m-4, m-2$), задается как отображение замкнутого подмножества U'_j в диграмме $D(Y_j, g_j)$ на открытое подмножество U_j в диграмме $D(X, f)$. Отображение σ является проективным накрытием, и итеративным применением второй части предложения 1.2.5 мы можем найти диграмму $D(Z, h)$ модуля $\Omega^1(M) = \text{Ker } \sigma$. Заметим, что $\text{Im } \varphi_j \cap \text{Im } \varphi_{j+2} = U_j \cap$

$U_{j+2} = S_{i_{j+1}}$. Тогда $\Omega^1(M)$ является представлением для R -модульной диаграммы

$$\begin{aligned} & D(\varphi_3^{-1}(S_{i_4}), g_3) \times_{\varphi_5^{-1}\varphi_3} D(\varphi_5^{-1}(S_{i_4}) \cup \varphi_5^{-1}(S_{i_6}), g_5) \times_{\varphi_7^{-1}\varphi_5} \\ & D(\varphi_7^{-1}(S_{i_6}) \cup \varphi_7^{-1}(S_{i_8}), g_7) \times_{\varphi_7^{-1}\varphi_5} \cdots \times_{\varphi_{m-4}^{-1}\varphi_{m-6}} \\ & D(\varphi_{m-4}^{-1}(S_{i_{m-5}}) \cup \varphi_{m-4}^{-1}(S_{i_{m-3}}), g_{m-4}) \times_{\varphi_{m-2}^{-1}\varphi_{m-4}} D(\varphi_{m-2}^{-1}(S_{i_{m-3}}), g_{m-2}), \end{aligned}$$

где $\varphi_{j+2}^{-1}\varphi_j: D(\varphi_{j+2}^{-1}(S_{i_{j+1}}) - \text{Ker } \varphi_{j+2}, g_{j+2}) \rightarrow D(\varphi_j^{-1}(S_{i_{j+1}}) - \text{Ker } \varphi_j, g_j)$ — изоморфизм вершин $S_{i_{j+1}}$, являющихся замкнутыми подмножествами, в соответствующих диаграммах.

Для того, чтобы визульно представить описанное выше построение диаграммы $D(Z, h)$, рассмотрим “дополняющие” слова $y_3, y_4, \dots, y_{m-4}, y_{m-3}$ такие, что $y_3x_3 = s_{i_3}, y_4x_4 = s_{i_5}, y_5x_5 = s_{i_5}, \dots, y_{m-4}x_{m-4} = s_{i_{m-4}}, y_{m-3}x_{m-3} = s_{i_{m-2}}$. Тогда диаграммы $D(\varphi_3^{-1}(S_{i_4}), g_3), D(\varphi_5^{-1}(S_{i_4}) \cup \varphi_5^{-1}(S_{i_6}), g_5), \dots, D(\varphi_{m-4}^{-1}(S_{i_{m-5}}) \cup \varphi_{m-4}^{-1}(S_{i_{m-3}}), g_{m-4}), D(\varphi_{m-2}^{-1}(S_{i_{m-3}}), g_{m-2})$ — это открытые подмножества

$$\begin{array}{cccccccc} S_{i_2} & & S_{i_4} & S_{i_4} & & S_{i_6} & S_{i_{m-5}} & S_{i_{m-3}} & S_{i_{m-3}} & S_{i_{m-1}} \\ & \searrow y_2 & / y_3 & & \searrow y_4 & / y_5 & & \searrow y_{m-5} & / y_{m-4} & \searrow y_{m-3} & / y_{m-2} \\ & & S_{i_3} & & & S_{i_5} & & & S_{i_{m-4}} & & S_{i_{m-2}} \end{array} \quad (1.10)$$

в диаграммах $D(Y_3, g_3), D(Y_5, g_5), \dots, D(Y_{m-4}, g_{m-4}), D(Y_{m-2}, g_{m-2})$, соответственно, а диаграмма $D(Z, h)$ получается выписыванием рядом друг к другу диаграмм (1.10), и отождествлением вершин $S_{i_4}, S_{i_6}, \dots, S_{i_{m-5}}, S_{i_{m-3}}$ в “соседних” диаграммах.

Таким образом, модуль $\Omega^1(M)$ имеет диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 S_{i_2} & & S_{i_4} & & \dots & & S_{i_{m-3}} & & S_{i_{m-1}} \\
 & \searrow y_2 & & \nearrow y_3 & & \searrow y_4 & & \nearrow y_5 & & \searrow y_{m-5} & & \nearrow y_{m-4} & & \searrow y_{m-3} & & \nearrow y_{m-2} \\
 & & S_{i_3} & & & & S_{i_5} & & & & & & S_{i_{m-4}} & & & & S_{i_{m-2}} & & .
 \end{array} \quad (1.11)$$

Заметим, что слова y_j , “дополняющие слева” слова x_j до некоторого слова максимальной длины, являются также и “дополняющими справа”. А именно, $x_3y_3 = s_{i_4}$, $x_4y_4 = s_{i_5}$, $x_5y_5 = s_{i_6}$, \dots , $x_{m-4}y_{m-4} = s_{i_{m-3}}$, $x_{m-3}y_{m-3} = s_{i_{m-2}}$. Применяя к диаграмме (1.11) модуля $\Omega^1(M)$ аналогичные рассуждения, что были применены для диаграммы (1.8) модуля M , с учетом последнего замечания, мы получаем, что модуль $\Omega^2(M)$ имеет диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 S_{i_1} & & S_{i_3} & & S_{i_5} & & \dots & & S_{i_{m-4}} & & S_{i_{m-2}} & & S_{i_m} \\
 & \searrow x_1 & & \nearrow x_2 & & \searrow x_3 & & \nearrow x_4 & & \searrow x_5 & & \dots & & \nearrow x_{m-5} & & \searrow x_{m-4} & & \nearrow x_{m-3} & & \searrow x_{m-2} & & \nearrow x_{m-1} \\
 & & S_{i_2} & & & & S_{i_4} & & \dots & & & & S_{i_{m-3}} & & & & S_{i_{m-1}} & & .
 \end{array} \quad (1.12)$$

Описанную только что процедуру построения диаграмм модулей $\Omega^1(M)$ и $\Omega^2(M)$ можно условно изобразить в виде следующего рисунка:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & S_{i_3} & & S_{i_5} & & S_{i_{m-4}} & & S_{i_{m-2}} \\
 & & & \searrow x_3 & & \nearrow x_4 & & \searrow x_5 & & \dots & & \nearrow x_{m-5} & & \searrow x_{m-4} & & \nearrow x_{m-3} \\
 S_{i_2} & & P_{i_3} & & S_{i_4} & & P_{i_5} & & \dots & & P_{i_{m-4}} & & S_{i_{m-3}} & & P_{i_{m-2}} & & S_{i_{m-1}} \\
 & & & \searrow y_2 & & \nearrow y_3 & & \searrow y_4 & & \nearrow y_5 & & \dots & & \searrow y_{m-5} & & \nearrow y_{m-4} & & \searrow y_{m-3} & & \nearrow y_{m-2} \\
 S_{i_1} & & P_{i_2} & & S_{i_3} & & P_{i_4} & & S_{i_5} & & \dots & & S_{i_{m-4}} & & P_{i_{m-3}} & & S_{i_{m-2}} & & P_{i_{m-1}} & & S_{i_m} \\
 & & & \searrow x_1 & & \nearrow x_2 & & \searrow x_3 & & \nearrow x_4 & & \searrow x_5 & & \dots & & \nearrow x_{m-5} & & \searrow x_{m-4} & & \nearrow x_{m-3} & & \searrow x_{m-2} & & \nearrow x_{m-1} \\
 & & S_{i_2} & & & & S_{i_4} & & \dots & & & & S_{i_{m-3}} & & & & S_{i_{m-1}} & & .
 \end{array} \quad (1.13)$$

Здесь мы приставили друг к другу диаграммы (1.8), (1.11) и (1.12) модулей M , $\Omega^1(M)$ и $\Omega^2(M)$ так, чтобы соответствующие простые модули

наложились друг на друга. Кроме того, мы ставили внутрь образовавшегося “квадрата”, окруженного стрелками \setminus и $/$, символ P_j , если верхняя и нижняя “вершины” квадрата — символы S_j . При этом, если модуль P_j окружен на рисунке (1.13) наклонными стрелками \setminus и $/$, помеченными некоторыми словами, то из вышеприведенного описания следует, что P_j имеет соответствующую диаграмму-“квадрат”. Если же одна из стрелок \setminus или $/$, окружающих P_j , отсутствует (P_j находится на краю рисунка), то можно ее мысленно дорисовать, пометив соответствующей буквой α_{jk} , где S_j и S_k — вершины “отсутствующего ребра”.

Кроме того, из описанной процедуры мы получаем вид дифференциала $d_0: Q_1(M) = P_{i_2} \oplus P_{i_4} \oplus \dots \oplus P_{i_{m-3}} \oplus P_{i_{m-1}} \rightarrow Q_0(M) = P_{i_3} \oplus P_{i_5} \oplus \dots \oplus P_{i_{m-4}} \oplus P_{i_{m-2}}$ из минимальной проективной резольвенты $Q_\bullet(M) \rightarrow M$ модуля M , который легко считывается из рисунка (1.13). Дифференциал $d_0 = \psi \circ \pi$, где отображения $\pi: Q_1(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ и $\psi: \Omega^1(M) \rightarrow Q_0(M)$ — проективное накрытие и инъективная оболочка модуля $\Omega^1(M)$, соответственно (напомним, R — симметричная алгебра). Из вышеприведенного описания следует, что эпиморфизм π может быть выбран так, что для него имеется соответствующий гомоморфизм диаграмм, при котором замкнутые подмножества

$$\begin{array}{ccccccc}
 S_{i_2} & & S_{i_4} & & S_{i_{m-3}} & & S_{i_{m-1}} \\
 \searrow y_2 & & / y_3 & \searrow y_4 & / y_{m-4} & \searrow y_{m-3} & / y_{m-2} \\
 & S_{i_3}, S_{i_3} & & S_{i_5}, \dots, S_{i_{m-4}} & & S_{i_{m-2}}, S_{i_{m-2}} &
 \end{array}$$

диаграмм модулей $P_{i_2}, P_{i_4}, \dots, P_{i_{m-3}}, P_{i_{m-1}}$, соответственно, отобража-

ются на изоморфные им открытые подмножества диаграммы модуля $\Omega^1(M)$. Дуальными рассуждениями мы получаем, что мономорфизм ψ может быть выбран так, что для него имеется соответствующий гомоморфизм диаграмм, при котором замкнутые подмножества (1.10) диаграммы модуля $\Omega^1(M)$ отображаются на изоморфные им открытые подмножества диаграмм модулей $P_{i_3}, P_{i_5}, \dots, P_{i_{m-4}}, P_{i_{m-2}}$, соответственно. Тогда, с учетом леммы 1.3.11, мы получаем, что в качестве дифференциала d_0 может быть выбрано любое отображение вида

$$\begin{array}{ccccccccccc} & P_{i_3} & \oplus & P_{i_5} & \dots & P_{i_{m-4}} & \oplus & P_{i_{m-2}} & & = & Q_0(M) \\ & \nearrow_{\pm x_2} & & \nwarrow^{\pm x_3} & & \nearrow_{\pm x_4} & & \nwarrow^{\pm x_5} & & & \uparrow_{d_0} \\ P_{i_2} & \oplus & & P_{i_4} & \oplus & \dots & \oplus & P_{i_{m-3}} & \oplus & & P_{i_{m-1}} = Q_1(M) \end{array}$$

(напомним, отображение x здесь означает гомоморфизм умножения справа на элемент x), или, в матричных обозначениях,

$$d_0 = \begin{pmatrix} \pm x_2 & \pm x_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm x_4 & \pm x_5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \pm x_{m-5} & \pm x_{m-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \pm x_{m-3} & \pm x_{m-2} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1.3.13. *Сизигии $\Omega^1(S_1)$ и $\Omega^2(S_1)$ имеют следующие диаграммы:*

$$\Omega^1(S_1): \begin{array}{ccc} S_2 & & S_3 \\ & \beta_{21} \searrow & / \beta_{31} \\ & S_1 & \end{array}; \quad \Omega^2(S_1): \begin{array}{ccccc} S_3 & & S_1 & & S_2 \\ & \beta_{32} \searrow & / \alpha_{12} \quad \alpha_{13} \searrow & & / \beta_{23} \\ & S_2 & & S_3 & \end{array}.$$

Диаграмма модуля $\Omega^m(S_1)$, $m \geq 3$, получается из диаграммы модуля $\Omega^{m-2}(S_1)$ с помощью следующих операций. Слева и справа к диаграмме $\Omega^{m-2}(S_1)$ присоединяются зигзаги:

Отсюда мы сразу получаем диаграммы модулей $\Omega^1(S_1)$, $\Omega^2(S_1)$ и $\Omega^3(S_1)$. Докажем утверждение 1.3.13(1). По предположению индукции, можно считать, что диаграмма модуля $\Omega^{m-2}(S_1)$ заканчивается слева и справа зигзагами, описанными в случае 1.3.13(2). Тогда требуемое утверждение непосредственно вытекает из описанной выше процедуры построения диаграмм сизигий и вида рисунка (1.13). Аналогично доказываются утверждения 1.3.13(2), (3).

Кроме того, описанная процедура вместе с утверждением теоремы 1.3.13 и только что построенным рисунком дает общий вид бикомплекса (1.6), а также определяет отображения между модулями P_i в этом бикомплексе, с точностью до знака, и остается только соответствующим образом расставить знаки. \square

Следствие 1.3.14. (1) Для любого $i = 1, 2, 3$

$$\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_i, S_i) = \begin{cases} k, & \text{если } m = 3k + 1, \\ k + 1, & \text{если } m = 3k \text{ или } m = 3k + 2. \end{cases}$$

(2) При $i \neq j$

$$\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_i, S_j) = \begin{cases} k, & \text{если } m = 3k, \\ k + 1, & \text{если } m = 3k + 1 \text{ или } m = 3k + 2. \end{cases}$$

Доказательство. Заметим, что $\operatorname{Ext}_R^m(S_i, S_j) \simeq \operatorname{Hom}_R(\Omega^m(S_i), S_j) \simeq \operatorname{Hom}_R(Q_m(S_i), S_j)$. Тогда требуемое утверждение непосредственно следует из вида бикомплекса (1.6) (или аналогичного бикомплекса для

модуля S_2 или S_3):

$$Q_m(S_1) \simeq \begin{cases} (k+1)P_1 \oplus kP_2 \oplus kP_3, & \text{если } m = 3k, \\ kP_1 \oplus (k+1)P_2 \oplus (k+1)P_3, & \text{если } m = 3k+1, \\ (k+1)P_1 \oplus (k+1)P_2 \oplus (k+1)P_3, & \text{если } m = 3k+1 \end{cases}$$

(здесь мы используем сокращенное обозначение: nX — это прямая сумма n копий модуля X). \square

Замечание 1.3.15. Из теоремы 1.3.7 вытекает, что в случае, когда главный блок групповой алгебры KG Морита-эквивалентен одной из алгебр серии $D(3\mathcal{K})$ (см. теорему 1.1.1), минимальная проективная резольвента тривиального модуля K может быть получена, как тотализация бикомплекса вида (1.6) (где модуль P_1 — проективное накрытие модуля K , модули P_2 и P_3 — проективные накрытия остальных двух простых модулей из главного блока KG , и соответственно нужно изменить гомоморфизмы в бикомплексе). В частности, это справедливо для групп $G = \text{PSL}(2, q)$, $q \equiv 3 \pmod{4}$ (см. доказательство следствия 1.1.8). Таким образом, несмотря на то, что указанные группы имеют силовские 2-подгруппы различных порядков, минимальная проективная резольвента тривиального модуля K может быть построена как бикомплекс одного и того же вида; и изложенные выше рассуждения проясняют комбинаторные причины этого факта. Заметим также, что знакопеременная группа $A_4 \simeq \text{PSL}(2, 3)$, и резольвента вида (1.6) является минимальной, что уточняет соответствующий результат из [55, р. 194].

1.4. Серия $D(3A)_1$

В настоящем параграфе $R = R^{(A)} = R_n^{(A)}$ ($n \in \mathbb{N}$) — алгебра, определенная в параграфе 1.1. Пусть e_i , $i = 1, 2, 3$, — идемпотенты алгебры R , соответствующие вершинам колчана $Q^{(A)}$. Аналогично параграфу 1.3, через $P_i = Re_i$, $i = 1, 2, 3$, мы обозначим проективные неразложимые модули алгебры R . Заметим, что алгебра R — симметричная, и обозначим через $S_i = \text{Soc } P_i \simeq \text{top } P_i$, $i = 1, 2, 3$, простые R -модули (соответствующие вершинам колчана $Q^{(A)}$). Мы построим минимальные проективные резольвенты и сизигии модулей S_i (теоремы 1.4.6 и 1.4.10, соответственно), вновь используя диаграммный метод Бенсона–Карлсона [28], а также некоторые рассуждения из параграфа 1.3.

Аналогично, элементы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ алгебры R (соответствующие стрелкам колчана $Q^{(A)}$) мы будем называть буквами, а произведения букв — словами. При этом количество букв в слове мы будем называть его длиной, и будем считать, что идемпотенты e_1, e_2, e_3 — слова нулевой длины. Из соотношений, определяющих алгебру R , легко выписать все ненулевые слова (порождающие R как K -линейное пространство). Слова, порождающие P_1 — это слова

$$e_1, \alpha, \delta\alpha, \gamma\delta\alpha, \beta\gamma\delta\alpha, \dots, \gamma\delta\alpha(\beta\gamma\delta\alpha)^{n-1}, (\beta\gamma\delta\alpha)^n; \quad (1.14)$$

слова, порождающие P_2 —

$$e_2, \gamma, \beta\gamma, \alpha\beta\gamma, \delta\alpha\beta\gamma, \dots, \alpha\beta\gamma(\delta\alpha\beta\gamma)^{n-1}, (\delta\alpha\beta\gamma)^n; \quad (1.15)$$

и слова, порождающие R_3 —

$$\begin{aligned} e_3, \delta, \gamma\delta, \beta\gamma\delta, \alpha\beta\gamma\delta, \dots, \beta\gamma\delta(\alpha\beta\gamma\delta)^{n-1}, (\alpha\beta\gamma\delta)^n, \\ \beta, \alpha\beta, \delta\alpha\beta, \gamma\delta\alpha\beta, \dots, \delta\alpha\beta(\gamma\delta\alpha\beta)^{n-1}, (\gamma\delta\alpha\beta)^n \end{aligned} \quad (1.16)$$

(при этом $(\alpha\beta\gamma\delta)^n = (\gamma\delta\alpha\beta)^n$). Введем сокращенные обозначения для следующих слов:

$$\begin{aligned} \mu_1 = (\beta\gamma\delta\alpha)^{n-1}, \quad \mu_2 = (\delta\alpha\beta\gamma)^{n-1}, \quad \eta_1 = (\alpha\beta\gamma\delta)^{n-1}, \quad \eta_2 = (\gamma\delta\alpha\beta)^{n-1}, \\ s_1 = (\beta\gamma\delta\alpha)^n, \quad s_2 = (\delta\alpha\beta\gamma)^n, \quad s_3 = (\alpha\beta\gamma\delta)^n = (\gamma\delta\alpha\beta)^n. \end{aligned}$$

Лемма 1.4.1. Пусть y и εy — ненулевые слова ненулевой длины, где $\varepsilon \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ — буква, соответствующая стрелке $i \xrightarrow{\varepsilon} j$ в колчане $Q^{(A)}$. Тогда $\text{Rad } Ry = R\varepsilon y$, и $Ry/R\varepsilon y \simeq S_i$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть 2 случая: (а) $i = 1, j = 3, \varepsilon = \alpha$; и (б) $i = 3, j = 1, \varepsilon = \beta$. Кроме того, $y = y'\alpha$, $y = y'\beta$, $y = y'\gamma$ или $y = y'\delta$ для некоторого ненулевого слова y' . Рассмотрим случай (а), и пусть $y = y'\alpha$. Так как $\alpha y'\alpha$ — ненулевое слово, то из (1.14) мы видим, что, как K -линейное пространство, $Ry = \langle y, \alpha y, \delta\alpha y, \gamma\delta\alpha y, \beta\gamma\delta\alpha y, \dots, \gamma\delta\alpha\mu_1, s_1 \rangle$, и $\text{Soc } Ry = Rs_1 = S_1$. Если $y = \gamma\delta\alpha\mu_1$, то $\alpha y = s_1$, и утверждение очевидно. Пусть $y \neq \gamma\delta\alpha\mu_1$. Тогда рассмотрим отображение $\beta^*: Ry \rightarrow Ry\beta$, $\beta^*(x) = x\beta$. Заметим, что $\beta^*(Ry) = Ry\beta$, $\beta^*(R\alpha y) = R\alpha y\beta$, и по предположению индукции можно считать, что $\text{Rad } Ry\beta = R\alpha y\beta$. Поскольку $\text{Ker } \beta^* = Rs_1 = S_1 = \text{Soc } Ry$, то осталось совершить индукционный переход.

Теперь докажем вторую часть леммы. Заметим, что так как $\alpha y \neq 0$, то $e_1 y = y$, $e_2 y = e_3 y = 0$, и умножение на элементы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и e_i ($i =$

1, 2, 3) алгебры R в модуле $Ry/R\alpha y = \{ky + R\alpha y : k \in K\}$ совпадает с умножением в $S_1 = Rs_1$, откуда $Ry/R\alpha y \simeq S_1$. Остальные случаи в этом утверждении рассматриваются аналогично. \square

Про алгебру R и модули P_i известно следующее предложение и следствие из него (см. [34, 3.1, 6.4]).

Предложение 1.4.2. Пусть $R = R^{(A)} = R_n^{(A)}$ — алгебра, определенная в параграфе 1.1; $P_i = Re_i$, $i = 1, 2, 3$, — неразложимые проективные модули алгебры R , соответствующие вершинам колчана $Q^{(K)}$.

(1) Модули P_1 и P_2 — цепные,

$$P_1 = U(S_1, S_3, S_2, S_3, S_1, S_3, S_2, S_3, \dots, S_1),$$

$$P_2 = U(S_2, S_3, S_1, S_3, S_2, S_3, S_1, S_3, \dots, S_2).$$

(2) $\text{Rad } P_3/S_3 = M \oplus N$, где $M \simeq \text{Rad}^2 P_2$, $N \simeq \text{Rad}^2 P_1$.

(3) Матрица Картана алгебры R равна

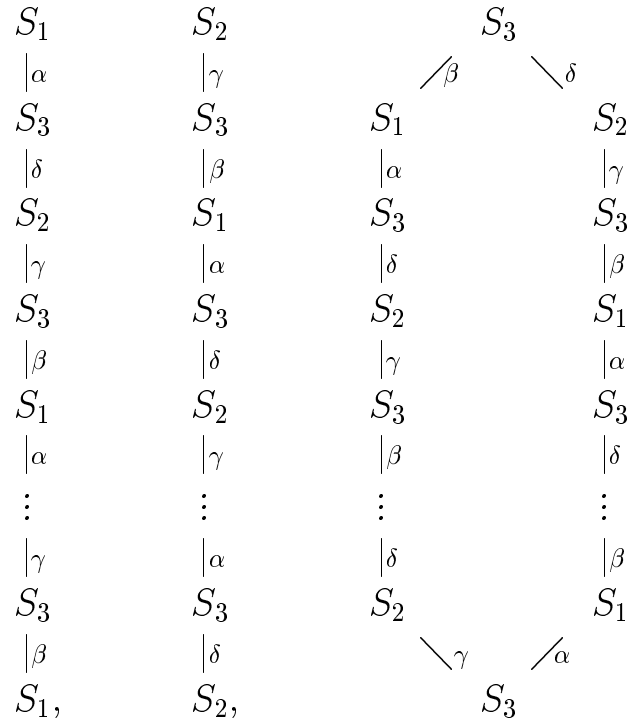
$$\begin{pmatrix} n+1 & n & 2n \\ n & n+1 & 2n \\ 2n & 2n & 4n \end{pmatrix}.$$

Следствие 1.4.3. Для любых $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$\dim_K \text{Ext}_R^1(S_i, S_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} = \{1, 3\} \text{ или } \{i, j\} = \{2, 3\} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом, стрелкам $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ колчана $Q^{(A)}$ соответствуют элементы групп расширений $\text{Ext}_R^1(S_1, S_3)$, $\text{Ext}_R^1(S_3, S_1)$, $\text{Ext}_R^1(S_2, S_3)$, $\text{Ext}_R^1(S_3, S_2)$. Зафиксируем произвольные ненулевые элементы указанных групп, и будем обозначать их также через $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, соответственно.

Лемма 1.4.4. *Проективные модули P_1 , P_2 и P_3 имеют следующие диаграммы, соответственно:*



При этом в диаграммах модулей P_1 и P_2 имеется $2n$ вершин S_3 , а в диаграмме модуля P_3 — $4n$ вершин S_3 .

Доказательство. С учетом леммы 1.2.11, диаграммы модулей P_1 и P_2 непосредственно получаются из предложения 1.4.2(1),(3) и следствия 1.4.3. Тот факт, что модуль P_3 имеет указанную диаграмму, доказывается аналогично лемме 1.3.4. \square

Замечание 1.4.5. Диаграммы модулей P_1 , P_2 и P_3 имеют тесную взаимосвязь со словами (1.14), (1.15) и (1.16), порождающими соответствующий модуль как K -линейное пространство (ср. замечание 1.3.6). Обозначим диаграммы модулей P_1 , P_2 и P_3 через $D(X_1, f_1)$, $D(X_2, f_2)$ и $D(X_3, f_3)$, соответственно. Тогда, если мы спустимся в диаграмме

$D(X_i, f_i)$ по стрелкам с вершины $\text{top } X_i$ до некоторой другой вершины графа X_i , записывая встречающиеся буквы справа налево, то мы получим некоторое ненулевое слово ненулевой длины из (1.14), если $i = 1$, из (1.15), если $i = 2$, и из (1.16), если $i = 3$. Кроме того, любое ненулевое слово $x = xe_i$, кроме слова e_i , может быть “прочитано” подобным образом. В частности, слова $(\alpha\beta\gamma\delta)^n$ и $(\gamma\delta\alpha\beta)^n$ получаются при проходе в графе X_3 с вершины $\text{top } X_3$ до вершины $\text{Soc } X_3$ по “правой” и по “левой” стороне, соответственно (заметим, что $(\alpha\beta\gamma\delta)^n = (\gamma\delta\alpha\beta)^n = s_3$ — ненулевые слова максимально возможной длины, начинающиеся справа с букв δ и β , соответственно). Аналогично, слово $(\beta\gamma\delta\alpha)^n = s_1$ прочитывается при проходе диаграммы $D(X_1, f_1)$ сверху вниз, и слово $(\delta\alpha\beta\gamma)^n = s_2$ прочитывается из диаграммы $D(X_2, f_2)$.

Рассмотрим гомоморфизмы умножения справа на элементы алгебры R , действующие между модулями P_1, P_2, P_3 . Если $x = e_i x e_j$ — ненулевое слово, то имеется гомоморфизм $x^*: P_i \rightarrow P_j$, $x^*(y) = yx$. В дальнейшем ради простоты обозначений (аналогично параграфу 1.3) мы будем обозначать гомоморфизм умножения справа на элемент $x \in R$ также через x .

Теорема 1.4.6. *Периодические комплексы*

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{s_1} P_1 \xrightarrow{\beta} P_3 \xrightarrow{\alpha} P_1 \xrightarrow{s_1} P_1 \xrightarrow{\beta} P_3 \xrightarrow{\alpha} P_1, \\ \dots &\xrightarrow{s_2} P_2 \xrightarrow{\delta} P_3 \xrightarrow{\gamma} P_2 \xrightarrow{s_2} P_2 \xrightarrow{\delta} P_3 \xrightarrow{\gamma} P_2 \end{aligned}$$

являются минимальными проективными резольвентами простых мо-

дулей S_1 и S_2 соответственно. Тотализация бикомплекса

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \downarrow \gamma\delta & & \downarrow \gamma\delta & \\
 & & & P_2 \xleftarrow{-\alpha\beta\gamma\mu_2} & P_3 \xleftarrow{-\alpha\beta\eta_2} & P_3 \xleftarrow{-\alpha\beta} & \\
 & & & \downarrow \delta & \downarrow \gamma\delta & \downarrow \gamma\delta\eta_1 & \\
 & & & P_3 \xleftarrow{\alpha\beta\eta_2} & P_3 \xleftarrow{\alpha\beta} & P_3 \xleftarrow{\alpha\beta} & \\
 & & & \downarrow \gamma\delta & \downarrow \gamma\delta\eta_1 & \downarrow \gamma\delta\alpha\mu_1 & \\
 P_2 \xleftarrow{-\alpha\beta\gamma\mu_2} & P_3 \xleftarrow{-\alpha\beta} & P_3 \xleftarrow{-\beta} & P_1 & & & \\
 \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma\delta\alpha\mu_1 & & & & \\
 P_3 \xleftarrow{\beta} & P_1 & & & & &
 \end{array}$$

является минимальной проективной резольвентой модуля S_3 .

Аналогично параграфу 1.3, для доказательства теоремы 1.4.6 нам потребуется несколько вспомогательных утверждений. Кроме того, при записи проективных модулей $Q_m(S_3)$ из минимальной проективной резольвенты S_3 мы будем использовать соглашение, аналогичное замечанию 1.3.9. Диаграммы, являющиеся зигзагами, мы будем обозначать также, как в параграфе 1.3 — максимальные подпоследовательности одинаково ориентированных ребер будем заменять одной чертой, которая помечается соответствующим словом.

Лемма 1.4.7. *Если R -модульная диаграмма является зигзагом и имеет представление, то она имеет D -единственное представление.*

Лемма 1.4.8. *Пусть x и y — ненулевые слова ненулевой длины такие, что $x \in e_i R e_j$, $y \in e_j R e_i$, и $xy = s_i$; M — подмодуль модуля*

$P_i = Re_i$. Тогда

$$M \text{ имеет диаграмму } \begin{array}{c} S_j \\ \searrow x \\ S_i \end{array} \iff M \simeq Ry.$$

Лемма 1.4.9. Пусть $D(X, f)$ — представимая R -модульная диаграмма вида

$$\begin{array}{c} S_i \\ \searrow x \\ S_j \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{c} S_i \\ /x_1 \\ S_k \end{array} \quad \begin{array}{c} S_i \\ \searrow x_2 \\ S_j \end{array},$$

где x, x_1, x_2 — ненулевые слова ненулевой длины, причем $x, x_1, x_2 \neq s_m$ ($\forall m = 1, 2, 3$). Тогда в диаграмме модуля P_i имеется замкнутое подмножество, изоморфное X . Кроме того, если $D(X, f)$ — диаграмма второго вида, то $i = 3$.

Леммы 1.4.7, 1.4.8 и 1.4.9 доказываются аналогично соответствующим утверждениям из параграфа 1.3 (леммы 1.3.10, 1.3.11 и 1.3.12, соответственно). Достаточно во всех рассуждениях заменить цепные диаграммы вида

$$\dots \xleftarrow{\alpha_{ij}} S_i \xleftarrow{\alpha_{ji}} S_j \xleftarrow{\alpha_{ij}} S_i \xleftarrow{\alpha_{ji}} S_j \xleftarrow{\alpha_{ij}} S_i \xleftarrow{\alpha_{ji}} \dots$$

на диаграммы вида

$$\dots \xleftarrow{\delta} S_3 \xleftarrow{\alpha} S_1 \xleftarrow{\beta} S_3 \xleftarrow{\gamma} S_2 \xleftarrow{\delta} S_3 \xleftarrow{\alpha} \dots,$$

и стрелки $i \xrightarrow{\alpha_{ij}} j$ колчана $Q^{(\mathcal{K})}$ — на стрелки $i \xrightarrow{\varepsilon} j$ колчана $Q^{(\mathcal{A})}$, $\varepsilon \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, а также воспользоваться замечанием 1.4.5 и принять во внимание, что P_1 и P_2 — цепные модули, а модуль P_3 имеет диаграмму,

аналогичную диаграмме (1.5), из которой, в частности, следует, что $\text{Soc}(P_3/\text{Soc } P_3) \simeq S_1 \oplus S_2 \simeq \text{Rad } P_3/\text{Rad}^2 P_3$.

Теперь мы опишем процедуру построения диаграмм сизигий и минимальных проективных резольвент модулей, диаграммы которых являются сизигиями. При этом наша новая процедура будет во многом аналогична процедуре, описанной в параграфе 1.3 на стр. 48–53.

Пусть M — R -модуль с диаграммой

$$\begin{array}{ccccccc} S_3 & & S_3 & & S_3 & & S_3 \\ & \searrow \gamma\delta\eta_1 & /x_1 & \searrow x_2 & /x_{m-1} & \searrow x_m & /\alpha\beta\eta_2 \\ & & S_3 & \cdots & & S_3 & \\ & & & & & & \end{array}, \quad (1.17)$$

где $x_j \neq s_3$, $j = 1, \dots, m$, — ненулевые слова ненулевой длины. Заметим, что ввиду леммы 1.4.7, диаграмма (1.17) имеет D -единственное представление, и, следовательно, определяет модуль M с точностью до изоморфизма (и даже с точностью до D -изоморфизма). Рассуждения, аналогичные проведенным при рассмотрении диаграммы (1.8), показывают, что модуль $\Omega^1(M)$ имеет диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} S_1 & & S_3 & & \cdots & & S_3 & & S_2 \\ & \searrow \gamma\delta\alpha\mu_1 & / \alpha\beta & \searrow y_1 & /y_2 & \searrow y_{m-1} & /y_m & \searrow \gamma\delta & /\alpha\beta\gamma\mu_2 \\ & & S_3 & & S_3 & & S_3 & & S_3 \\ & & & & & & & & \end{array}, \quad (1.18)$$

где $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m$ — такие слова алгебры R , что $y_1x_1 = y_2x_2 = \dots = y_{m-1}x_{m-1} = y_mx_m = s_3$. Тогда $Q_1(M) \simeq P_1 \oplus P_3 \oplus \dots \oplus P_3 \oplus P_2$.

Рассмотрим в диаграмме (1.18) открытые подмножества

$$\begin{array}{ccccccc}
 S_1 & & S_3 & & S_3 & & S_2 \\
 \searrow \gamma\delta\alpha\mu_1 & & \nearrow \alpha\beta \searrow y_1 & & \nearrow y_m \searrow \gamma\delta & & \nearrow \alpha\beta\gamma\mu_2 \\
 & S_3, & S_3 & S_3, \dots, & S_3 & S_3 & ,
 \end{array}$$

объединение которых дает всю диаграмму (1.18), и заметим, что в диаграммах модулей $P_1, P_3, \dots, P_3, P_2$, соответственно, имеются замкнутые подмножества, изоморфные указанным. Проводя далее рассуждения, аналогичные рассуждениям, примененным при рассмотрении диаграммы (1.8), мы получаем, что диаграмма модуля $\Omega^2(M)$ получается следующим образом: мы выписываем открытые подмножества диаграмм модулей $P_1, P_3, \dots, P_3, P_2$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & S_3 & S_3 & & S_3 & & S_3 & S_3 \\
 & \nearrow \beta & \searrow \gamma\delta\eta_1 \nearrow x_1 & & \searrow x_m \nearrow \alpha\beta\eta_2 & & \searrow \delta \\
 S_1 & & S_3 & , \dots, & S_3 & , & S_2 & ,
 \end{array}$$

соответственно, и отождествляем вершины S_3 , оказавшиеся соседними (заметим, что если x, y — такие слова, что $x, y \in e_3 Re_3$, и $yx = e_3$, то $xy = e_3$). Таким образом, модуль $\Omega^2(M)$ имеет диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & S_3 & & S_3 & & S_3 & & S_3 \\
 & \nearrow \beta & \searrow \gamma\delta\eta_1 \nearrow x_1 & \searrow x_2 & \dots & \nearrow x_{m-1} \searrow x_m & \nearrow \alpha\beta\eta_2 & \searrow \delta \\
 S_1 & & S_3 & & \dots & & S_3 & S_2 .
 \end{array} \quad (1.19)$$

Аналогично можно найти диаграмму модуля $\Omega^3(M)$. Заметим, что $Q_2(M) \simeq P_3 \oplus \dots \oplus P_3$, и рассмотрим в диаграмме (1.19) открытые подмножества

$$\begin{array}{ccccccc}
 & S_3 & & S_3 & & S_3 & & S_3 \\
 & \nearrow \beta & \searrow \gamma\delta\eta_1 \nearrow x_1 & \searrow x_2 & & \nearrow x_{m-1} \searrow x_m & \nearrow \alpha\beta\eta_2 & \searrow \delta \\
 S_1 & & S_3, S_3 & & S_3, \dots, S_3 & & S_3, S_3 & S_2 .
 \end{array}$$

$\Omega^4(M)$ мы наложили друг на друга соответствующие простые модули.

Кроме того, мы ставили внутрь образовавшегося “квадрата”, окруженного стрелками \setminus и \swarrow , символ P_3 , если верхняя и нижняя “вершины” квадрата — символы S_3 . При этом, если модуль P_3 окружен на рисунке (1.21) наклонными стрелками \setminus и \swarrow , помеченными некоторыми словами, то из вышеприведенного описания следует, что P_3 имеет соответствующую диаграмму-“квадрат”. Если же одна из стрелок \setminus или \swarrow , окружающих P_3 , отсутствует (P_3 находится на краю рисунка), то можно ее мысленно дорисовать, пометив соответствующей буквой β или δ (если “отсутствующее ребро” — это

$$\begin{array}{ccc} & S_3 & S_3 \\ \text{ребро} & \swarrow & \text{или ребро} \quad \setminus \\ S_1 & & S_2 \end{array}, \text{ соответственно}.$$

Кроме того, если на рисунке между стрелками \swarrow и \setminus , окружающими P_3 , встретились символы S_3 , S_1 или S_2 , то следует отождествить вершины S_3 (встретившиеся внутри рисунка), и мысленно дорисовать ребро между вершинами S_1 или S_2 , пометив его буквой α или γ , соответственно. Из приведенных выше рассуждений следует, что таким образом дорисованные ребра вокруг символа P_3 на рисунке (1.21), вместе с уже имеющимися, образуют диаграмму модуля P_3 . Кроме того, ребра \swarrow и \setminus (помеченные некоторыми словами), стоящие рядом с символами P_1 или P_2 , также образуют диаграмму соответствующего модуля.

Описанная процедура дает также описание дифференциалов

$$\cdots \xrightarrow{d_3} Q_3(M) \xrightarrow{d_2} Q_2(M) \xrightarrow{d_1} Q_1(M) \xrightarrow{d_0} Q_0(M)$$

в минимальной проективной резольвенте модуля M , которое легко считывается с рисунка (1.21). Применяя аналогичные рассуждения, что были применены к рисунку (1.13), мы получаем, что в качестве дифференциалов могут быть выбраны любые отображения вида

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 P_3 & \oplus & P_3 & \cdots & P_3 & \oplus & P_3 & & & & & = & Q_0(M) \\
 \nearrow_{\pm\beta} & \nwarrow_{\pm\gamma\delta\eta_1} & \nearrow_{\pm x_1} & \nwarrow_{\pm x_2} & \nearrow_{\pm x_{m-1}} & \nwarrow_{\pm x_m} & \nearrow_{\pm\alpha\beta\eta_2} & \nwarrow_{\pm\delta} & & & & \uparrow & d_0 \\
 P_1 & \oplus & P_3 & \oplus & \cdots & \oplus & P_3 & \oplus & P_2 & & & = & Q_1(M) \\
 \nwarrow_{\pm\gamma\delta\alpha\mu_1} & \nearrow_{\pm\alpha\beta} & \nwarrow_{\pm y_1} & \nearrow_{\pm y_2} & \nwarrow_{\pm y_{m-1}} & \nearrow_{\pm y_m} & \nwarrow_{\pm\gamma\delta} & \nearrow_{\pm\alpha\beta\gamma\mu_2} & & & & \uparrow & d_1 \\
 P_3 & \oplus & P_3 & \cdots & P_3 & \oplus & P_3 & & & & & = & Q_2(M) \\
 \nearrow_{\pm\beta} & \nwarrow_{\pm\gamma\delta\eta_1} & \nearrow_{\pm x_1} & \nwarrow_{\pm x_2} & \nearrow_{\pm x_{m-1}} & \nwarrow_{\pm x_m} & \nearrow_{\pm\alpha\beta\eta_2} & \nwarrow_{\pm\delta} & & & & \uparrow & d_2 \\
 P_3 & \oplus & P_3 & \oplus & \cdots & \oplus & P_3 & \oplus & P_3 & & & = & Q_3(M) \\
 & & & & & & & & & & & & (1.22)
 \end{array}$$

(при этом остается лишь согласовать знаки так, чтобы $d_l d_{l+1} = 0$).

Теорема 1.4.10. (1) *Простые модули S_1 и S_2 являются периодическими с периодом 3, т. е. $\Omega^3(S_i) \simeq S_i$ ($i = 1, 2$). Диаграммы сизигий $\Omega^i(S_j)$, $i, j = 1, 2$, таковы:*

$$\Omega^1(S_1): \begin{array}{c} S_3 \\ \searrow_{\mu_1} \\ S_1 \end{array}, \quad \Omega^2(S_1): \begin{array}{c} S_1 \\ \searrow_{\eta_1} \\ S_3 \end{array}; \quad \Omega^1(S_2): \begin{array}{c} S_3 \\ \searrow_{\mu_2} \\ S_2 \end{array}, \quad \Omega^2(S_2): \begin{array}{c} S_2 \\ \searrow_{\eta_2} \\ S_2 \end{array}.$$

(2) *Сизигии $\Omega^1(S_3)$ и $\Omega^2(S_3)$ модуля S_3 имеют следующие диаграммы:*

$$\Omega^1(S_3): \begin{array}{c} S_1 \quad S_2 \\ \searrow_{\gamma\delta\alpha\mu_1} / \alpha\beta\gamma\mu_2 \\ S_3 \end{array}, \quad \Omega^2(S_3): \begin{array}{c} S_3 \\ / \beta \quad \searrow_{\delta} \\ S_1 \quad S_2 \end{array}.$$

Если же $t \geq 3$, то диаграмма сизигии $\Omega^m(S_3)$ получается из диаграммы $\Omega^{m-2}(S_3)$ при помощи следующих операций:

(2а) если $t \equiv 0 \pmod{3}$, то слева и справа от диаграммы $\Omega^{m-2}(S_3)$ отрезаются ребра

$$\begin{array}{ccc} S_1 & & S_2 \\ & \searrow \gamma\delta\alpha\mu_1 & \swarrow \alpha\beta\gamma\mu_2 \\ & S_3 & S_3 \end{array},$$

и на их место присоединяются ребра, соответственно,

$$\begin{array}{ccc} S_3 & & S_3 \\ & \searrow \gamma\delta\eta_1 & \swarrow \alpha\beta\eta_2 \\ & S_3 & S_3 \end{array};$$

(2б) если $t \equiv 1 \pmod{3}$, то слева и справа от диаграммы $\Omega^{m-2}(S_3)$ отрезаются ребра

$$\begin{array}{ccc} & S_3 & S_3 \\ & \swarrow \beta & \searrow \delta \\ S_1 & & S_2 \end{array},$$

и на их место присоединяются зигзаги, соответственно,

$$\begin{array}{ccc} S_1 & & S_3 & S_3 & & S_2 \\ & \searrow \gamma\delta\alpha\mu_1 / \alpha\beta & & \swarrow \gamma\delta & & \swarrow \alpha\beta\gamma\mu_2 \\ & S_3 & & S_3 & & \end{array};$$

(2в) если $t \equiv 2 \pmod{3}$, то слева и справа к диаграмме $\Omega^{m-2}(S_3)$ присоединяются ребра, соответственно,

$$\begin{array}{ccc} & S_3 & S_3 \\ & \swarrow \beta & \searrow \delta \\ S_1 & & S_2 \end{array}.$$

Доказательство теорем 1.4.6 и 1.4.10. Так как $\Omega^1(S_1) \simeq \text{Rad } P_1$, то $\Omega^1(S_1)$ имеет требуемую диаграмму. Тогда $Q_1(S_1) \simeq P_3$. Ввиду леммы 1.4.9, в диграмме модуля P_3 имеется замкнутое подмножество, изоморфное диаграмме сизигии $\Omega^1(S_1)$. Так как последовательность

$0 \rightarrow \Omega^2(S_1) \rightarrow Q_1(S_1) \rightarrow \Omega^1(S_1) \rightarrow 0$ точна, то из диаграммы модуля P_3 , с учетом леммы 1.4.7, мы получаем, что $\Omega^2(S_1)$ имеет требуемую диаграмму, и $Q_2(S_1) \simeq P_1$. Так как $P_1/S_1 \simeq \Omega^2(S_1)$, то $\Omega^3(S_1) \simeq S_1$. Кроме того, из приведенных рассуждений и следствия 1.4.8 вытекает, что соответствующий периодический комплекс из теоремы 1.4.6 является минимальной проективной резольвентой модуля S_1 (заметим, что отображение $s_1 = s_1^*: P_1 \rightarrow P_1$ имеет образ $P_1 s_1 = R s_1 = S_1$). Соответствующие части теорем 1.4.6 и 1.4.10, относящиеся к модулю S_2 , доказываются аналогично.

Далее, так как сизигия $\Omega^1(S_3) \simeq \text{Rad } P_3$, то ее диаграмма имеет указанный вид. Применим описанную выше процедуру к модулю $M = \Omega^1(S_3)$ и получим следующий рисунок, аналогичный рисунку (1.21):

$$\begin{array}{c}
 S_3 \\
 \\
 \begin{array}{ccccc}
 S_1 & P_3 & S_2 & & \\
 & \searrow \gamma \delta \alpha \mu_1 & / \alpha \beta \gamma \mu_2 & & \\
 P_1 & S_3 & P_2 & & \\
 & / \beta & \searrow \delta & & \\
 S_1 & P_3 & S_2 & & \\
 S_3 & & S_3 & & \\
 & \searrow \gamma \delta \eta_1 & / \alpha \beta \eta_2 & & \\
 S_1 & P_3 & S_3 & P_3 & S_2 \\
 & \searrow \gamma \delta \alpha \mu_1 & / \alpha \beta & \searrow \gamma \delta & / \alpha \beta \gamma \mu_2 \\
 & S_3 & & S_3 &
 \end{array}
 \end{array} \tag{1.23}$$

(здесь мы дорисовали рисунок сверху, поставив “вершину” S_3 этой “пирамиды”). Отсюда сразу видно, что сизигия $\Omega^2(S_3)$ имеет требуемую диаграмму. Кроме того, из (1.23) видны также диграммы $\Omega^3(S_3)$

и $\Omega^4(S_3)$. Сизигии $\Omega^m(S_3)$, $m \geq 5$, получаются при помощи дальнейшей дорисовки рисунка (1.23) вниз с использованием описанной выше процедуры.

Докажем утверждение 1.4.10(2а). По предположению индукции, можно считать, что диаграмма сизигии $\Omega^{m-2}(S_3)$ имеет на левом и правом концах ребра, описанные в утверждении 1.4.10(2б). Тогда требуемое утверждение для $\Omega^m(S_3)$ непосредственно вытекает из вида рисунка (1.21). Аналогично доказываются утверждения 1.4.10(2б) и (2в).

Кроме того, из приведенных рассуждений и рисунков (1.21), (1.23) непосредственно вытекает вид бикомплекса из теоремы 1.4.6 и отображений между модулями P_i в этом бикомплексе (см. описание гомоморфизмов (1.22)), и остается лишь соответствующим образом расставить знаки. \square

Следствие 1.4.11. (1) $\text{Ext}_R^*(S_1, S_2) = \text{Ext}_R^*(S_2, S_1) = 0$

(2) Для $i = 1, 2$

$$\dim_K \text{Ext}_R^m(S_i, S_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } m \equiv 1 \pmod{3}, \\ 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(3) При $\{i, j\} = \{1, 3\}$ или $\{i, j\} = \{2, 3\}$

$$\dim_K \text{Ext}_R^m(S_i, S_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 1 \pmod{3}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(4)

$$\dim_K \text{Ext}_R^m(S_3, S_3) = \begin{cases} k + 1, & \text{если } m = 3k \text{ или } m = 3k + 2, \\ k, & \text{если } m = 3k + 1. \end{cases}$$

Доказательство. Из теоремы 1.4.6 мы получаем, что при $i = 1, 2$

$$Q_m(S_i) \simeq \begin{cases} P_3, & \text{если } m \equiv 1 \pmod{3}, \\ P_i, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$Q_m(S_3) \simeq \begin{cases} (k+1)P_3, & \text{если } m = 3k, \\ P_1 \oplus kP_3 \oplus P_2, & \text{если } m = 3k+1, \\ (k+1)P_3, & \text{если } m = 3k+2. \end{cases}$$

Отсюда непосредственно вытекает требуемое утверждение. \square

Замечание 1.4.12. Из теоремы 1.4.6 вытекает, что в случае, когда главный блок групповой алгебры KG Морита-эквивалентен одной из алгебр серии $D(3\mathcal{A})_1$ (см. теорему 1.1.1), и при этой эквивалентности тривиальный модуль K переходит в простой модуль S_3 , соответствующий вершине 3 колчана $Q^{(A)}$, минимальная проективная резольвента тривиального модуля K может быть получена, как тотализация бикомплекса, аналогичного бикомплексу из теоремы 1.4.6. В частности, это справедливо для групп $G = \text{PSL}(2, q)$, $q \equiv 1 \pmod{4}$, а также для знакопеременных групп $G = A_5$ и $G = A_6$ (см. доказательство следствия 1.1.8). В [55] описаны минимальные проективные резольвенты тривиального модуля K над алгебрами KA_5 и KA_6 и выражено определенное удивление, что несмотря на то, что указанные группы имеют силовские 2-подгруппы различных порядков, минимальная проективная резольвента тривиального модуля K может быть построена как бикомплекс (визуально) одного и того же вида. Изложенные выше рассуждения проясняют комбинаторные причины этого факта (см. также замечание 1.3.15).

Глава 2

Образующие и соотношения

В главе 2 мы завершаем доказательство теорем 1.1.2 и 1.1.3. В параграфе 2.1 мы приводим необходимые нам сведения из гомологической алгебры и вводим некоторые обозначения; серии $D(\mathcal{K})$ посвящен параграф 2.2, и серии $D(\mathcal{A})_1$ — параграф 2.2.

2.1. Предварительные сведения

Пусть Λ — произвольная конечномерная алгебра, M, N, L — конечнопорожденные Λ -модули. Хорошо известно (см., например, [26]), что для любого ненулевого элемента $\varphi \in \text{Ext}_{\Lambda}^m(M, N)$ существует эпиморфизм $\hat{\varphi}: \Omega^m(M) \rightarrow N$ такой, что имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & X & = & X & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 & \rightarrow & \Omega^m(M) & \rightarrow & Q_{m-1}(M) & \rightarrow & Q_{m-2}(M) \rightarrow \cdots \rightarrow Q_0(M) \rightarrow M \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \hat{\varphi} & & \downarrow & & \parallel & \parallel & \parallel \\ 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & Y & \rightarrow & Q_{m-2}(M) & \rightarrow \cdots \rightarrow Q_0(M) \rightarrow M \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

с точными строками, нижняя строка которой представляет φ . Если $\varphi = 0$, то считаем, что $\widehat{\varphi} = 0$.

Для гомоморфизма $\widehat{\varphi}: \Omega^m(M) \rightarrow N$ с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^{m+1}(M) & \longrightarrow & Q_m(M) & \longrightarrow & \Omega^m(M) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \Omega^1(\widehat{\varphi}) & & \downarrow & & \downarrow \widehat{\varphi} \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^1(N) & \longrightarrow & Q_0(N) & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

определяется гомоморфизм $\Omega^1(\widehat{\varphi}): \Omega^{m+1}(M) \rightarrow \Omega^1(N)$. По индукции определяются Ω -сдвиги $\Omega^t(\widehat{\varphi}): \Omega^{m+t}(M) \rightarrow \Omega^t(N)$, $t \geq 2$.

Гомоморфизмы $\Omega^t(\widehat{\varphi}): \Omega^{m+t}(M) \rightarrow \Omega^t(N)$, $t \geq 0$, взаимосвязаны с произведением Йонеды следующим образом (см., например, [26]).

Предложение 2.1.1. Пусть N — простой Λ -модуль. Тогда отображение $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ задает изоморфизм K -линейных пространств $\text{Ext}_\Lambda^m(M, N) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(\Omega^m(M), N)$.

Предложение 2.1.2. Пусть M, N, L — простые Λ -модули. Рассмотрим элементы групп расширений $\varphi \in \text{Ext}_\Lambda^m(M, N)$, $\psi \in \text{Ext}_\Lambda^n(N, L)$ ($m, n \geq 1$) и произведение Йонеды $\psi\varphi \in \text{Ext}_\Lambda^{m+n}(M, L)$; а также гомоморфизмы $\widehat{\psi}: \Omega^n(N) \rightarrow L$ и $\Omega^n(\widehat{\varphi}): \Omega^{m+n}(M) \rightarrow \Omega^n(N)$. Тогда $\widehat{\psi\varphi} = \widehat{\psi} \circ \Omega^n(\widehat{\varphi})$.

Пусть M и N — простые Λ -модули. В дальнейшем мы будем использовать следующую запись для элементов групп расширений $\varphi \in \text{Ext}_\Lambda^m(M, N)$ и соответствующих гомоморфизмов $\Omega^t(\widehat{\varphi}): \Omega^{m+t}(M) \rightarrow \Omega^t(N)$, $t \geq 0$.

Так как группа расширений $\text{Ext}_\Lambda^m(M, N) \simeq \text{Hom}_\Lambda(\Omega^m(M), N)$, то любой элемент $\varphi \in \text{Ext}_\Lambda^m(M, N)$ можно представить с помощью отображения $\widehat{\varphi}$, входящего в следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} Q_m(M) & \longrightarrow & \Omega^m(M) & \subset & Q_{m-1}(M) \\ \downarrow f_1 & & \downarrow \widehat{\varphi} & & \downarrow f_0 \\ Q_0(N) & \xrightarrow{\pi_N} & N & \subset & Y_N \end{array}, \quad (2.1)$$

где Y_N — инъективная оболочка модуля N , $\pi_N: Q_0(N) \rightarrow N$ — проективное накрытие N . Диаграмму (2.1), а также аналогичные ей диаграммы, можно кратко изображать в виде

$$\widehat{\varphi}: \begin{array}{ccc} Q_m(M) & \xrightarrow{d_{m-1}^{(M)}} & Q_{m-1}(M) \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\ Q_0(N) & \xrightarrow{\pi_N} & Y_N \end{array}, \quad (2.2)$$

поскольку коммутативный квадрат (2.2) однозначно определяет гомоморфизм $\widehat{\varphi}$ из (2.1) (здесь $d_{m-1}^{(M)}$ — дифференциал из минимальной проективной резольвенты модуля M). Действительно, если X_1, X_2, Y_1, Y_2 — произвольные Λ -модули, и квадрат

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{x_1} & X_2 \\ \downarrow y_1 & & \downarrow y_2 \\ Y_1 & \xrightarrow{x_2} & Y_2 \end{array}$$

коммутативен, то $\text{Im}(y_2|_{\text{Im } x_1}) = y_2 x_1(X_1) = x_2 y_1(X_1) \subset \text{Im } x_2$, и имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{x_1} & \text{Im } x_1 & \subset & X_2 \\ \downarrow y_1 & & \downarrow y_2|_{\text{Im } x_1} & & \downarrow y_2 \\ Y_1 & \xrightarrow{x_2} & \text{Im } x_2 & \subset & Y_2. \end{array}$$

Аналогично, Ω -сдвиги $\Omega^t(\widehat{\varphi})$, $t \geq 1$, отображения $\widehat{\varphi}$ можно описать с помощью коммутативных квадратов

$$\begin{array}{ccc} Q_{m+t}(M) & \xrightarrow{d_{m+t-1}^{(M)}} & Q_{m+t-1}(M) \\ \Omega^t(\widehat{\varphi}): \quad \downarrow f_{t+1} & & \downarrow f_t \\ Q_t(N) & \xrightarrow{d_{t-1}^{(N)}} & Q_{t-1}(N) \end{array}$$

(здесь $\{f_l\}$ — цепное отображение резольвент, полученное подъемом отображения $\widehat{\varphi}$).

2.2. Серия $D(3\mathcal{K})$

В настоящем параграфе мы завершаем доказательство теоремы 1.1.2. Здесь $R = R^{(\mathcal{K})} = R_{n_1, n_2, n_3}^{(\mathcal{K})}$ и $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(\mathcal{K})} = \mathcal{E}_{n_1, n_2, n_3}^{(\mathcal{K})}$, $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, — алгебры, определенные в параграфе 1.1; e_i , $i = 1, 2, 3$, — идемпотенты алгебры R , соответствующие вершинам колчана $Q^{(\mathcal{K})}$; $P_i = Re_i$, $i = 1, 2, 3$, — проективные неразложимые модули над алгеброй R ; и $S_i = \text{Soc } P_i \simeq \text{top } P_i$, $i = 1, 2, 3$, — простые R -модули, соответствующие вершинам колчана $Q^{(\mathcal{K})}$.

Мы выберем некоторые однородные элементы алгебры Йонеды

$$\mathcal{Y}(R) = \bigoplus_{m \geq 0} \bigoplus_{i, j=1}^3 \text{Ext}_R^m(S_i, S_j)$$

$$x_{ij} \in \text{Ext}_R^1(S_i, S_j), \quad i \neq j, \quad \text{степени 1 и}$$

$$y_k \in \text{Ext}_R^2(S_k, S_k), \quad k = 1, 2, 3, \quad \text{степени 2}$$

и покажем, что они являются образующими алгебры $\mathcal{Y}(R)$. При этом мы воспользуемся обозначениями параграфа 2.1. Напомним, что через $d_m^{(i)}$ мы обозначаем дифференциалы в минимальной проективной

резольвенте $Q_\bullet(S_i) \rightarrow S_i$ модуля S_i (которые были описаны в теореме 1.3.7 и замечании 1.3.8).

Лемма 2.2.1. *Следующие диаграммы коммутативны, и, следовательно, определяют элементы $x_{12} \in \text{Ext}_R^1(S_1, S_2)$, $x_{21} \in \text{Ext}_R^1(S_2, S_1)$, $y_1 \in \text{Ext}_R^2(S_1, S_1)$:*

$$\begin{array}{ccc} Q_1(S_1) & \xrightarrow{d_0^{(1)}} & Q_0(S_1) \\ \widehat{x}_{12}: \downarrow (1,0) & & \downarrow \beta_{21} \\ Q_0(S_2) & \xrightarrow{s_2} & P_2, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Q_1(S_2) & \xrightarrow{d_0^{(2)}} & Q_0(S_2) \\ \widehat{x}_{21}: \downarrow (0,1) & & \downarrow \beta_{12} \\ Q_0(S_1) & \xrightarrow{s_1} & P_1, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Q_2(S_1) & \xrightarrow{d_1^{(1)}} & Q_1(S_1) \\ \widehat{y}_1: \downarrow (0,1,0) & & \downarrow (\alpha_{12},0) \\ Q_0(S_1) & \xrightarrow{s_1} & P_1. \end{array}$$

Доказательство. Напомним, что отображения между модулями P_i мы задали при помощи умножения справа на элементы R , поэтому при вычислении композиции таких отображений следует читать $x^*y^* = (yx)^*$ ($x, y \in R$). Тогда

$$\begin{aligned} \beta_{21} \circ d_0^{(1)} &= \beta_{21}(\alpha_{12}, \alpha_{13}) = (s_2, 0) = s_2 \circ (1, 0); \\ \beta_{12} \circ d_0^{(2)} &= \beta_{12}(\alpha_{23}, \alpha_{21}) = (s_1, 0) = s_1 \circ (1, 0); \\ (\alpha_{12}, 0) \circ d_1^{(1)} &= (\alpha_{12}, 0) \begin{pmatrix} \alpha_{23} & \beta_{21} & 0 \\ 0 & -\beta_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix} = (0, s_1, 0) = s_1 \circ (0, 1, 0). \end{aligned}$$

□

Замечание 2.2.2. Остальные (образующие) элементы x_{ij} , y_k алгебры $\mathcal{Y}(R)$ определим аналогично, достаточно в указанных диаграммах

применить четную подстановку индексов (123) или (132) (см. замечание 1.3.5).

Лемма 2.2.3. *Гомоморфизмы \widehat{x}_{12} , \widehat{x}_{21} , \widehat{y} имеют следующие Ω -сдвиги:*

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^2(\widehat{x}_{12}): & & \Omega^1(\widehat{x}_{12}): \\
Q_3(S_1) \xrightarrow{d_2^{(1)}} Q_2(S_1) \xrightarrow{d_1^{(1)}} Q_1(S_1) & & \xrightarrow{d_1^{(1)}} Q_1(S_1) \\
\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \downarrow & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha_{21}\alpha_{12})^{n_3-1} & 0 \end{array} \right) \downarrow & (1,0) \downarrow \\
Q_2(S_2) \xrightarrow{d_1^{(2)}} Q_1(S_2) \xrightarrow{d_0^{(2)}} Q_0(S_2) , & &
\end{array} \tag{2.3}$$

$$\begin{array}{ccc}
\Omega^2(\widehat{x}_{21}): & & \Omega^1(\widehat{x}_{21}): \\
Q_3(S_2) \xrightarrow{d_2^{(2)}} Q_2(S_2) \xrightarrow{d_1^{(2)}} Q_1(S_2) & & \xrightarrow{d_1^{(2)}} Q_1(S_2) \\
\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \downarrow & \left(\begin{array}{ccc} 0 & -(\alpha_{12}\alpha_{21})^{n_3-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \downarrow & (0,1) \downarrow \\
Q_2(S_1) \xrightarrow{d_1^{(1)}} Q_1(S_1) \xrightarrow{d_0^{(1)}} Q_0(S_1) , & &
\end{array} \tag{2.4}$$

$$\begin{array}{ccc}
Q_3(S_1) \xrightarrow{d_2^{(1)}} Q_2(S_1) & & \\
\Omega^1(\widehat{y}_1): \quad \downarrow \left(\begin{array}{cccc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \downarrow (0,1,0) & & \\
Q_1(S_1) \xrightarrow{d_1^{(1)}} Q_0(S_1) . & &
\end{array} \tag{2.5}$$

Доказательство. Докажем коммутативность соответствующих диаграмм. Заметим, что

$$\begin{aligned}
d_0^{(1)} &= (\alpha_{12}, \alpha_{13}), & d_0^{(2)} &= (\alpha_{23}, \alpha_{21}), \\
d_1^{(1)} &= \begin{pmatrix} \alpha_{23} & \beta_{21} & 0 \\ 0 & -\beta_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix}, & d_1^{(2)} &= \begin{pmatrix} \alpha_{31} & \beta_{32} & 0 \\ 0 & -\beta_{12} & \alpha_{13} \end{pmatrix}, \\
d_2^{(1)} &= \begin{pmatrix} \alpha_{31} & \beta_{32} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{23} & \alpha_{21} \end{pmatrix}, & d_2^{(2)} &= \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \beta_{13} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{23} & \alpha_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Диаграмма (2.3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha_{21}\alpha_{21})^{n_3-1} & 0 \end{pmatrix} \circ d_2^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix} = d_1^{(2)} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(1, 0) \circ d_1^{(1)} = (\alpha_{23}, \beta_{21}, 0) = d_0^{(2)} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha_{21}\alpha_{21})^{n_3-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Диаграмма (2.4):

$$\begin{pmatrix} 0 & -(\alpha_{12}\alpha_{21})^{n_3-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ d_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\beta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{32} \end{pmatrix} = d_1^{(1)} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(0, 1) \circ d_1^{(2)} = (0, -\beta_{12}, \alpha_{13}) = d_0^{(1)} \circ \begin{pmatrix} 0 & -(\alpha_{12}\alpha_{21})^{n_3-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Диаграмма (2.5):

$$(0, 1, 0) \circ d_2^{(1)} = (0, -\alpha_{12}, \alpha_{13}, 0) = d_1^{(1)} \circ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Замечание 2.2.4. Ω -сдвиги остальных гомоморфизмов $\widehat{x}_{ij}, \widehat{y}_k$ определяются аналогично, достаточно в диаграммах (2.3), (2.4) и (2.5) применить четную подстановку индексов (123) или (132).

Лемма 2.2.5. *Как K -линейные пространства, приведенные ниже группы расширений имеют следующие образующие:*

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R^1(S_1, S_2) &= \langle x_{12} \rangle, & \text{Ext}_R^1(S_1, S_3) &= \langle x_{13} \rangle, \\ \text{Ext}_R^2(S_1, S_2) &= \langle x_{32}x_{13} \rangle, & \text{Ext}_R^2(S_1, S_3) &= \langle x_{23}x_{12} \rangle, \\ \text{Ext}_R^2(S_1, S_1) &= \langle y_1 \rangle. \end{aligned}$$

Доказательство. Заметим, что размерность каждой из данных здесь Ext-групп равна единице (см. следствие 1.3.14). Тогда достаточно доказать, что указанные элементы отличны от нуля. Очевидно, что $x_{12}, x_{13}, y_1 \neq 0$. Покажем, что $x_{32}x_{13}, x_{23}x_{12} \neq 0$. Рассмотрим коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
Q_2(S_3) & \longrightarrow & Q_1(S_3) & & Q_2(S_1) & \longrightarrow & Q_1(S_1) \\
\Omega^1(\widehat{x}_{13}): & \downarrow \left(\begin{array}{ccc} 0 & -(\alpha_{31}\alpha_{13})^{n_3-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \downarrow (0,1) & & & \Omega^1(\widehat{x}_{12}): & \downarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha_{21}\alpha_{12})^{n_3-1} & 0 \end{array} \right) \downarrow (1,0) & & & \\
Q_1(S_3) & \longrightarrow & Q_0(S_3) & & Q_1(S_2) & \longrightarrow & Q_0(S_2) \\
\widehat{x}_{32}: & \downarrow (0,1) & & \downarrow \beta_{23} & \widehat{x}_{23}: & \downarrow (1,0) & & \downarrow \beta_{32} \\
Q_0(S_2) & \xrightarrow{s_2} & P_2, & & Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3
\end{array}$$

(см. леммы 2.2.1, 2.2.3 и замечания 2.2.2, 2.2.4). Объемлющие квадраты этих диаграмм задают гомоморфизмы $\widehat{x}_{32}x_{13} = \widehat{x}_{32} \circ \Omega^1(\widehat{x}_{13})$ и $\widehat{x}_{23}x_{12} = \widehat{x}_{23} \circ \Omega^1(\widehat{x}_{12})$:

$$\begin{array}{ccc}
Q_2(S_3) & \longrightarrow & Q_1(S_3) & & Q_2(S_1) & \longrightarrow & Q_1(S_1) \\
\widehat{x}_{32}x_{13}: & \downarrow (0,0,1) & & \downarrow (0,\beta_{23}) & \widehat{x}_{23}x_{12}: & \downarrow (1,0,0) & & \downarrow (\beta_{32},0) \\
Q_0(S_2) & \xrightarrow{s_2} & P_2, & & Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3,
\end{array}$$

откуда мы непосредственно получаем требуемое утверждение. \square

Предложение 2.2.6. *Для любых $i, j \in \{1, 2, 3\}$ любое каноническое отображение $f: \Omega^m(S_i) \rightarrow S_j$ представляется в виде композиции отображений \widehat{x}_{kl} ($k \neq l$), \widehat{y}_t ($t = 1, 2, 3$), а также их Ω -сдвигов.*

Доказательство. При $m \leq 2$ утверждение следует из леммы 2.2.5.

Пусть $m \geq 3$. Если f индуцирует нулевое отображение на крайних (слева и справа) простых прямых слагаемых модуля $\text{top } \Omega^m(S_i)$,

то ввиду теоремы 1.3.13, с учетом леммы 1.3.10, существует гомоморфизм $f': \Omega^{m-2}(S_i) \rightarrow S_j$ такой, что $f = f'\rho$, где $\rho: \Omega^m(S_i) \rightarrow \Omega^{m-2}(S_i)$ — канонический эпиморфизм. Так как $\rho = \Omega^{m-2}(\tilde{\rho})$ для некоторого гомоморфизма $\tilde{\rho}: \Omega^2(S_i) \rightarrow S_i$, то $f = f'\Omega^{m-2}(\tilde{\rho})$, и требуемое утверждение получается индукцией по m .

Теперь предположим, что f индуцирует ненулевое отображение на одном из крайних прямых слагаемых в $\text{top } \Omega^m(S_i)$. Рассмотрим два случая: (а) $i = j$ и (б) $i \neq j$.

(а) Можно считать, что $i = j = 1$. Из соображений симметрии ясно, что достаточно разобрать случай, когда f индуцирует ненулевое отображение на крайнем слева прямом слагаемом в $\text{top } \Omega^m(S_1)$. Заметим, что тогда $m \equiv 0 \pmod{3}$, и ввиду теоремы 1.3.13 модуль $\Omega^m(S_1)$ имеет фактормодуль U с диаграммой

$$\begin{array}{ccc} S_1(*) & & S_2 \\ & \beta_{13} \searrow & \nearrow \alpha_{23} \\ & S_3 & . \end{array} \quad (2.6)$$

При этом f проходит через U , т. е. $f = f'\rho_1$, где $\rho_1: \Omega^m(S_1) \rightarrow U$ канонический эпиморфизм. Кроме того, мы будем помечать звездочкой тот простой модуль из $\text{top } U$, на котором f индуцирует ненулевое отображение. Заметим, что модуль $\Omega^1(S_3)$ имеет диаграмму (ср. с диаграммой модуля $\Omega^1(S_1)$ из теоремы 1.3.13)

$$\begin{array}{ccc} S_1 & & S_2 \\ & \beta_{13} \searrow & \nearrow \beta_{23} \\ & S_3 & , \end{array} \quad (2.7)$$

откуда видно, что модуль U вкладывается в $\Omega^1(S_3)$, так как в диаграмме (2.7) имеется открытое подмножество вида (2.6). Докажем, что гомоморфизм $f': U \rightarrow S_1$ поднимается до некоторого гомоморфизма $f'': \Omega^1(S_3) \rightarrow S_1$, т. е. $f' = f''\rho_2$, где $\rho_2: U \rightarrow \Omega^1(S_3)$ — вложение. Действительно, так как $\text{Soc } U = S_3$ содержится в $\text{Ker } f'$, то f' проходит через модуль $U/S_3 = V \oplus S_2$, где $V = U(S_1, S_3, S_1, \dots, S_1)$, причем на S_2 соответствующее индуцированное отображение равно нулю, и, следовательно, оно продолжается (с помощью доопределения нулем) до гомоморфизма $\Omega^1(S_3)/S_3 \rightarrow S_1$. Тогда в качестве f'' берем композицию последнего гомоморфизма с каноническим эпиморфизмом $\Omega^1(S_3) \rightarrow \Omega^1(S_3)/S_3$, и имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & U/S_3 & \equiv & V \oplus S_2 & \xrightarrow{(\simeq) \oplus 0} & V' \oplus U(S_2, S_3, S_2, \dots, S_2) \\
 & & \uparrow & & & & \parallel \\
 \Omega^m(S_1) & \xrightarrow{\rho_1} & U & \xrightarrow{\rho_2} & \Omega^1(S_3) & \longrightarrow & \Omega^1(S_3)/S_3 \\
 \downarrow f & & \downarrow f' & & \downarrow f'' & & \downarrow \\
 S_1 & \equiv & S_1 & \equiv & S_1 & \equiv & S_1
 \end{array}$$

(здесь мы использовали сокращенные обозначения: запись гомоморфизма $y_1 \oplus y_2: X_1 \oplus X_2 \rightarrow Y_1 \oplus Y_2$ означает, что $(y_1 \oplus y_2)(x_1 \oplus x_2) = y_1(x_1) \oplus y_2(x_2)$, и $(\simeq): V \rightarrow V'$ — некоторый изоморфизм). Таким образом, $f = f''\rho_2\rho_1$, где $\rho = \rho_2\rho_1: \Omega^m(S_1) \rightarrow \Omega^1(S_3)$ имеет вид $\rho = \Omega^1(\tilde{\rho})$ для некоторого $\tilde{\rho}: \Omega^{m-1}(S_1) \rightarrow S_3$, откуда $f = f''\Omega^1(\tilde{\rho})$, и можно воспользоваться индукцией по m .

(б) Пусть теперь $i \neq j$. Можно считать, что $i = 1$, $j = 2$ и f индуцирует ненулевое отображение на крайнем слева прямом слагаемом

в $\text{top } \Omega^m(S_1)$. Тогда $m \equiv 1 \pmod{3}$, и ввиду теоремы 1.3.13 модуль $\Omega^m(S_1)$ имеет фактормодуль U с диаграммой

$$\begin{array}{ccc} S_2(*) & & S_3 \\ & \beta_{21} \searrow & \nearrow \alpha_{31} \\ & S_1 & . \end{array}$$

Тогда, аналогично случаю (а), остается заметить только, что модуль U вкладывается в модуль $\Omega^1(S_1)$ (см. теорему 1.3.13), и провести аналогичные рассуждения. \square

Из предложения 2.2.6 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.2.7. *K -алгебра $\mathcal{Y}(R)$ порождается элементами*

$$x_{ij} \ (i \neq j), \quad y_k \ (k = 1, 2, 3). \quad (2.8)$$

Теорема 2.2.8. *Для образующих (2.8) алгебры $\mathcal{Y}(R)$ выполнены соотношения (1.1).*

Доказательство. Соотношения (1.1) проверяются единообразно. Проверим первое соотношение. Заметим, что элемент $x_{ji}x_{ij}$ представляется отображением $\widehat{x_{ji}x_{ij}} = \widehat{x_{ji}} \circ \Omega^1(\widehat{x_{ij}})$, и рассмотрим коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} Q_2(S_1) & \longrightarrow & Q_1(S_1) \\ \Omega^1(\widehat{x_{12}}): \downarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha_{21}\alpha_{12})^{n_3-1} & 0 \end{array} \right) \downarrow & & \Omega^1(\widehat{x_{21}}): \downarrow \left(\begin{array}{ccc} 0 & -(\alpha_{12}\alpha_{21})^{n_3-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \downarrow \\ Q_1(S_2) & \longrightarrow & Q_0(S_2) \\ \widehat{x_{21}}: \downarrow (0,1) & & \downarrow \\ Q_0(S_1) & \xrightarrow{s_1} & P_1, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Q_2(S_2) & \longrightarrow & Q_1(S_2) \\ \downarrow \left(\begin{array}{ccc} 0 & -(\alpha_{12}\alpha_{21})^{n_3-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \downarrow & & \\ Q_1(S_1) & \longrightarrow & Q_0(S_1) \\ \widehat{x_{12}}: \downarrow (1,0) & & \downarrow \\ Q_0(S_2) & \xrightarrow{s_2} & P_2. \end{array} \quad (2.9)$$

Объемлющий квадрат первой из диаграмм (2.9) задает отображение $\widehat{x_{21}x_{12}}$, объемлющий квадрат второй — отображение $\widehat{x_{12}x_{21}}$. Заметим, что при $n_3 > 1$ композиция гомоморфизмов $s_1(0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha_{21}\alpha_{12})^{n_3-1} & 0 \end{pmatrix} = (0, (\alpha_{21}\alpha_{12})^{2n_3-1}, 0)$ равна нулю, и, следовательно, $x_{21}x_{12} = 0$. С другой стороны, при $n_3 = 1$ этот объемлющий квадрат описывает в точности отображение y_1 . Рассматривая композицию $s_2(1, 0) \begin{pmatrix} 0 & -(\alpha_{12}\alpha_{21})^{n_3-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, -(\alpha_{12}\alpha_{21})^{2n_3-1}, 0)$ гомоморфизмов из второй диаграммы (2.9), мы получаем, что $x_{12}x_{21} = 0$ при $n_3 > 1$, и $x_{12}x_{21} = -y_2$ при $n_3 = 1$ (см. лемму 2.2.1 и замечание 2.2.2). Остальные возможные случаи индексов i, j получаются из описанных выше при соответствующих четных подстановках индексов 1, 2, 3 в диаграммах (2.9).

Аналогично, второе соотношение в (1.1) получается из сравнения объемлющих квадратов следующих пар коммутативных диаграмм (заметим, что $\widehat{y_j x_{ij}} = \widehat{y_j} \circ \Omega^2(\widehat{x_{ij}})$, $\widehat{x_{ij} y_i} = \widehat{x_{ij}} \circ \Omega^1(\widehat{y_i})$):

$$\begin{array}{ccc}
Q_3(S_1) & \longrightarrow & Q_2(S_1) \\
\Omega^2(\widehat{x_{12}}): & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \downarrow & \Omega^1(\widehat{y_1}): & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \downarrow \\
Q_2(S_2) & \longrightarrow & Q_1(S_2) \\
\widehat{y_2}: & \downarrow (0,1,0) & \downarrow & \widehat{x_{12}}: & \downarrow (1,0) & \downarrow \\
Q_0(S_2) & \xrightarrow{s_2} & P_2, & & Q_0(S_2) & \xrightarrow{s_2} & P_2;
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
Q_3(S_2) & \longrightarrow & Q_2(S_2) \\
\Omega^2(\widehat{x_{21}}): & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \downarrow & \Omega^1(\widehat{y_2}): & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \downarrow \\
Q_2(S_1) & \longrightarrow & Q_1(S_1) \\
\widehat{y_1}: & \downarrow (0,1,0) & \downarrow & \widehat{x_{21}}: & \downarrow (0,1) & \downarrow \\
Q_0(S_1) & \xrightarrow{s_1} & P_1, & & Q_0(S_1) & \xrightarrow{s_1} & P_1.
\end{array}$$

Из диаграмм видно, что $y_2x_{12} = -x_{12}y_1$ и $y_1x_{21} = -x_{21}y_2$. Остается заметить только, что остальные случаи рассматриваются идентично, достаточно применить в указанных диаграммах соответствующую четную подстановку к индексам 1, 2, 3. \square

Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{n_1, n_2, n_3}^{(\mathcal{K})} = K[\mathfrak{R}^{(\mathcal{K})}]/I$ — градуированная K -алгебра, определенная в параграфе 1.1, где I — идеал, порожденный элементами, соответствующими соотношениям (1.1). Ввиду теоремы 2.2.8 существует сюръективный гомоморфизм градуированных K -алгебр $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Y}(R)$, переводящий канонические образующие алгебры \mathcal{E} (т. е. соответствующие стрелкам в $\mathfrak{R}^{(\mathcal{K})}$) в соответствующие образующие алгебры $\mathcal{Y}(R)$. Пусть $\mathcal{E} = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{E}^m$ — прямое разложение, соответствующее градуировке на \mathcal{E} . Через e_i , $i = 1, 2, 3$, обозначим идемпотенты алгебры $K[\mathfrak{R}^{(\mathcal{K})}]$, соответствующие вершинам колчана $\mathfrak{R}^{(\mathcal{K})}$, и так же обозначим образы этих идемпотентов в \mathcal{E} . Следующее утверждение завершает доказательство теоремы 1.1.2.

Теорема 2.2.9. $\dim_K(e_i \mathcal{E}^m e_j) = \dim_K \text{Ext}_R^m(S_j, S_i)$ для любого $m \geq 0$ и любых $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Доказательство. Из вида соотношений (1.1) ясно, что любое произведение $z_1 z_2 \dots z_l$ образующих алгебры \mathcal{E} (т. е. $z_k = x_{i' i''}$ или $z_k = y_{i'}$) либо равно нулю, либо равно с точностью до знака “одночлену” вида $x_{i_{s-1} i_s} \dots x_{i_2 i_3} x_{i_1 i_2} y_{i_1}^t$, причем индексы i_1, i_2, \dots, i_s представляют собой обход вершин 1, 2, 3 колчана \mathfrak{R} либо против часовой стрелки, либо по

часовой стрелке. Рассмотрим два случая: (а) $i = j$ и (б) $i \neq j$. Поскольку утверждение предложения очевидно при $m = 0, 1$, то будем считать, что $m \geq 2$.

(а) Пусть $i = j = 1$. K -базис пространства $e_1 \mathcal{E}^m e_1$ составляют одночлены вида $(x_{31}x_{23}x_{12})^s y_1^t$ и $(x_{21}x_{32}x_{13})^s y_1^t$, $3s + 2t = m$ ($s, t \geq 0$). Обозначим $d_m = \dim_K(e_1 \mathcal{E}^m e_1)$. Тогда для любого $m \geq 2$

$$d_m = \begin{cases} d_{m-2} + 2, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{3}, \\ d_{m-2}, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (2.10)$$

поскольку при $m \not\equiv 0 \pmod{3}$ в приведенных выше одночленах $t \geq 1$, и эти одночлены однозначно соответствуют элементам аналогичного K -базиса пространства $e_1 \mathcal{E}^{m-2} e_1$ (достаточно опустить один сомножитель y_1 , при этом степень t уменьшится на единицу). Если же $m \equiv 0 \pmod{3}$, то имеется еще два элемента K -базиса, а именно, $(x_{31}x_{23}x_{12})^s$ и $(x_{21}x_{32}x_{13})^s$ ($m = 3s$). Далее, остается только заметить, что последовательность $\{d'_m\}_{m \geq 1}$, $d'_m = \dim_K \text{Ext}_R^m(S_1, S_1)$, определенная в следствии 1.3.14(1), удовлетворяет рекуррентному соотношению, аналогичному (2.10). Действительно, при $m = 3k$, $d'_m = k + 1$, $d'_{m-2} = d'_{3(k-1)+1} = k - 1$, и $d'_m = d'_{m-2} + 2$; при $m = 3k + 1$, $d'_m = k$, $d'_{m-2} = d'_{3(k-1)+2} = (k - 1) + 1 = k$, и $d'_m = d'_{m-2}$; и при $m = 3k + 2$, $d'_m = k + 1$, $d'_{m-2} = d'_{3k} = k + 1$, и $d'_m = d'_{m-2}$.

(б) Пусть теперь $i = 2, j = 1$. Аналогично, одночлены вида $x_{12}(x_{31}x_{23}x_{12})^s y_1^t$, $1 + 3s + 2t = m$, и $x_{32}x_{13}(x_{21}x_{32}x_{13})^s y_1^t$, $2 + 3s + 2t = m$ ($s, t \geq 0$), составляют K -базис пространства $e_2 \mathcal{E}^m e_1$. Теперь для размерностей

$d_m = \dim_K(e_2\mathcal{E}^m e_1)$ выполнено соотношение

$$d_m = \begin{cases} d_{m-2}, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{3}, \\ d_{m-2} + 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Действительно, при $m \equiv 0 \pmod{3}$ можно применить те же рассуждения, что в предыдущем случае были применены для $m \not\equiv 0 \pmod{3}$; при $m \equiv 1 \pmod{3}$ каждому одночлену указанного вида из K -базиса $e_2\mathcal{E}^m e_1$, за исключением одночлена $x_{12}(x_{31}x_{23}x_{12})^s$ ($m = 1 + 3s$), однозначно соответствует одночлен из K -базиса $e_2\mathcal{E}^{m-2} e_1$; и при $m \equiv 2 \pmod{3}$ таким “дополнительным” элементом базиса оказывается $x_{32}x_{13}(x_{21}x_{32}x_{13})^s$ ($2 + 3s = m$). Остается заметить, что последовательность $\{d'_m\}_{m \geq 1}$, $d'_m = \dim_K \text{Ext}_R^m(S_1, S_2)$, определенная в следствии 1.3.14(2), удовлетворяет соотношению, аналогичному соотношению (2.11). Действительно, при $m = 3k$, $d'_m = k$, $d'_{m-2} = d'_{3(k-1)+1} = (k-1) + 1 = k$, и $d'_m = d'_{m-2}$; при $m = 3k + 1$, $d'_m = k + 1$, $d'_{m-2} = d'_{3(k-1)+2} = (k-1) + 1 = k$, и $d'_m = d'_{m-2} + 1$; и при $m = 3k + 2$, $d'_m = k + 1$, $d'_{m-2} = d'_{3k} = k$, и $d'_m = d'_{m-2} + 1$. \square

Доказательство следствия 1.1.5. Не умаляя общности, считаем $i = 1$. Отметим, что $\mathcal{E}(S_1) \simeq e_1\mathcal{E}e_1$, и рассмотрим в алгебре $e_1\mathcal{E}e_1$ следующие элементы: $\gamma_1 = x_{31}x_{23}x_{12}$, $\gamma_2 = x_{21}x_{32}x_{13}$, $\beta = y_1$. Утверждение следствия 1.1.5 дальше непосредственно вытекает из соотношений (1.1) и вида базиса для $e_1\mathcal{E}^m e_1$ из доказательства теоремы 2.2.9, случай (а). Действительно, мы видим, что элементы $\gamma_1^s \beta^t, \gamma_2^s \beta^t \neq 0$, $3s + 2t = m$ ($s, t \geq 0$), составляют K -базис пространства $e_1\mathcal{E}^m e_1$, и

для элементов $\beta, \gamma_1, \gamma_2$ выполнены антикоммутирующие соотношения $\beta\gamma_1 = -\gamma_1\beta \neq 0$, $\beta\gamma_2 = -\gamma_2\beta \neq 0$, и, кроме того, при $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, $\gamma_1\gamma_2 = x_{31}x_{23}x_{12}x_{21}x_{32}x_{13} = x_{31}x_{23}(-y_2)x_{32}x_{13} = -x_{31}x_{23}x_{32}x_{13}y_1 = -x_{31}(-y_3)x_{13}y_1 = -x_{31}x_{13}y_1^2 = y_1^3 = \beta^3 \neq 0$, аналогично $\gamma_2\gamma_1 = x_{21}x_{32}x_{13}x_{31}x_{23}x_{12} = x_{21}x_{32}y_3x_{23}x_{12} = x_{21}x_{32}x_{23}x_{12}y_1 = x_{21}y_2x_{12}y_1 = -x_{21}x_{12}y_1^2 = -y_3 = -\beta^3 \neq 0$, и если по крайней мере одно из чисел n_1, n_2, n_3 больше единицы, то $\gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1 = 0$ (см. второе соотношение в (1.1)). \square

2.3. Серия $D(3A)_1$

В настоящем параграфе мы завершаем доказательство теоремы 1.1.3. Здесь $R = R^{(A)} = R_n^{(A)}$ и $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(A)} = \mathcal{E}_n^{(A)}$, $n \in \mathbb{N}$, — алгебры, определенные в параграфе 1.1; e_i , $i = 1, 2, 3$, — идемпотенты алгебры R , соответствующие вершинам колчана $Q^{(A)}$; $P_i = Re_i$, $i = 1, 2, 3$, — проективные неразложимые модули над алгеброй R ; и $S_i = \text{Soc } P_i \simeq \text{top } P_i$, $i = 1, 2, 3$, — простые R -модули, соответствующие вершинам колчана $Q^{(A)}$.

Мы выберем некоторые однородные элементы алгебры Йонеды

$$\mathcal{Y}(R) = \bigoplus_{m \geq 0} \bigoplus_{i,j=1}^3 \text{Ext}_R^m(S_i, S_j)$$

$$x_i \in \text{Ext}_R^1(S_i, S_3), \quad y_i \in \text{Ext}_R^1(S_3, S_i), \quad i = 1, 2, \text{ степени } 1,$$

$$z_0 \in \text{Ext}_R^2(S_3, S_3) \text{ степени } 2 \text{ и}$$

$$z_i \in \text{Ext}_R^3(S_3, S_3), \quad u_i \in \text{Ext}_R^3(S_i, S_i), \quad i = 1, 2, \text{ степени } 3$$

и покажем, что они являются образующими алгебры $\mathcal{Y}(R)$. При этом

мы воспользуемся обозначениями параграфа 2.1. Напомним, что через $d_m^{(i)}$ мы обозначаем дифференциалы в минимальной проективной резольвенте $Q_\bullet(S_i) \rightarrow S_i$ модуля S_i (которые были описаны в теореме 1.4.6).

Лемма 2.3.1. (1) *Следующие диаграммы коммутативны, и, следовательно, определяют элементы $x_i \in \text{Ext}_R^1(S_i, S_3)$, $y_i \in \text{Ext}_R^1(S_3, S_i)$, $z_i \in \text{Ext}_R^3(S_3, S_3)$, $u_i \in \text{Ext}_R^3(S_i, S_i)$ ($i = 1, 2$) и $z_0 \in \text{Ext}_R^2(S_3, S_3)$:*

$$\begin{array}{ccc}
Q_1(S_1) & \xrightarrow{d_0^{(1)}} & Q_0(S_1) & & Q_1(S_2) & \xrightarrow{d_0^{(2)}} & Q_0(S_2) \\
\hat{x}_1: \downarrow 1 & & \downarrow \beta\gamma\delta\eta_1 & & \hat{x}_2: \downarrow 1 & & \downarrow \delta\alpha\beta\eta_2 \\
Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3, & & Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3; \\
\\
Q_1(S_3) & \xrightarrow{d_0^{(3)}} & Q_0(S_3) & & Q_1(S_3) & \xrightarrow{d_0^{(3)}} & Q_0(S_3) \\
\hat{y}_1: \downarrow (1,0) & & \downarrow \gamma\delta\alpha\mu_1 & & \hat{y}_2: \downarrow (0,1) & & \downarrow \alpha\beta\gamma\mu_2 \\
Q_0(S_1) & \xrightarrow{s_1} & P_1, & & Q_0(S_2) & \xrightarrow{s_2} & P_2; \\
\\
& & Q_2(S_3) & \xrightarrow{d_1^{(3)}} & Q_1(S_3) & & \\
& & \hat{z}_0: \downarrow -1 & & \downarrow (0,\delta) & & \\
& & Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3; & & \\
\\
Q_3(S_3) & \xrightarrow{d_2^{(3)}} & Q_2(S_3) & & Q_3(S_3) & \xrightarrow{d_2^{(3)}} & Q_2(S_3) \\
\hat{z}_1: \downarrow (-1,0) & & \downarrow \gamma\delta\eta_1 & & \hat{z}_2: \downarrow (0,-1) & & \downarrow -\alpha\beta\eta_2 \\
Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3, & & Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3; \\
\\
Q_3(S_1) & \xrightarrow{d_2^{(1)}} & Q_2(S_1) & & Q_3(S_2) & \xrightarrow{d_2^{(2)}} & Q_2(S_2) \\
\hat{u}_1: \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \hat{u}_2: \downarrow 1 & & \downarrow 1 \\
Q_0(S_1) & \xrightarrow{s_1} & P_1, & & Q_0(S_2) & \xrightarrow{s_2} & P_2.
\end{array}$$

(2) Гомоморфизмы $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i$ ($i = 1, 2$) и \hat{z}_0 , определенные выше, имеют следующие Ω -сдвиги:

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^3(\hat{x}_1): & \Omega^2(\hat{x}_1): & \Omega^1(\hat{x}_1): & & \\ Q_4(S_1) & \xrightarrow{d_3^{(1)}} Q_3(S_1) & \xrightarrow{d_2^{(1)}} Q_2(S_1) & \xrightarrow{d_1^{(1)}} Q_1(S_1) & \\ \downarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \beta & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow 1 \\ Q_3(S_3) & \xrightarrow{d_2^{(3)}} Q_2(S_3) & \xrightarrow{d_1^{(3)}} Q_1(S_3) & \xrightarrow{d_0^{(3)}} Q_0(S_3) & , \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^3(\hat{x}_2): & \Omega^2(\hat{x}_2): & \Omega^1(\hat{x}_2): & & \\ Q_4(S_2) & \xrightarrow{d_3^{(2)}} Q_3(S_2) & \xrightarrow{d_2^{(2)}} Q_2(S_2) & \xrightarrow{d_1^{(2)}} Q_1(S_2) & \\ \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & & \downarrow -\delta & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & & \downarrow 1 \\ Q_3(S_3) & \xrightarrow{d_2^{(3)}} Q_2(S_3) & \xrightarrow{d_1^{(3)}} Q_1(S_3) & \xrightarrow{d_0^{(3)}} Q_0(S_3) ; \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^3(\hat{y}_1): & \Omega^2(\hat{y}_1): & \Omega^1(\hat{y}_1): & & \\ Q_4(S_3) & \xrightarrow{d_3^{(3)}} Q_3(S_3) & \xrightarrow{d_2^{(3)}} Q_2(S_3) & \xrightarrow{d_1^{(3)}} Q_1(S_3) & \\ \downarrow (1,0,0) & & \downarrow (-\gamma\delta\alpha\mu_1,0) & & \downarrow \gamma\delta\eta_1 & & \downarrow (1,0) \\ Q_3(S_1) & \xrightarrow{d_2^{(1)}} Q_2(S_1) & \xrightarrow{d_1^{(1)}} Q_1(S_1) & \xrightarrow{d_0^{(1)}} Q_0(S_1) , \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^3(\hat{y}_2): & \Omega^2(\hat{y}_2): & \Omega^1(\hat{y}_2): & & \\ Q_4(S_3) & \xrightarrow{d_3^{(3)}} Q_3(S_3) & \xrightarrow{d_2^{(3)}} Q_2(S_3) & \xrightarrow{d_1^{(3)}} Q_1(S_3) & \\ \downarrow (0,0,-1) & & \downarrow (0,-\alpha\beta\gamma\mu_2) & & \downarrow -\alpha\beta\eta_2 & & \downarrow (0,1) \\ Q_3(S_2) & \xrightarrow{d_2^{(2)}} Q_2(S_2) & \xrightarrow{d_1^{(2)}} Q_1(S_2) & \xrightarrow{d_0^{(2)}} Q_0(S_2) ; \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^4(\hat{z}_0): & \Omega^3(\hat{z}_0): & \Omega^2(\hat{z}_0): & \Omega^1(\hat{z}_0): & & & \\ Q_6(S_3) & \xrightarrow{d_5^{(3)}} Q_5(S_3) & \xrightarrow{d_4^{(3)}} Q_4(S_3) & \xrightarrow{d_3^{(3)}} Q_3(S_3) & \xrightarrow{d_2^{(3)}} Q_2(S_3) & & \\ \downarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \downarrow (0,1,0) & & \downarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} & & \downarrow -1 \\ Q_4(S_3) & \xrightarrow{d_3^{(3)}} Q_3(S_3) & \xrightarrow{d_2^{(3)}} Q_2(S_3) & \xrightarrow{d_1^{(3)}} Q_1(S_3) & \xrightarrow{d_0^{(3)}} Q_0(S_3) ; \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\Omega^3(\widehat{z}_1): & & \Omega^2(\widehat{z}_1): & & \Omega^1(\widehat{z}_1): \\
Q_6(S_3) & \xrightarrow{d_5^{(3)}} & Q_5(S_3) & \xrightarrow{d_4^{(3)}} & Q_4(S_3) & \xrightarrow{d_3^{(3)}} & Q_3(S_3) \\
\downarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \end{pmatrix} & & \downarrow (1,0) & & \downarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma\mu_2 & 0 \end{pmatrix} & & \downarrow (-1,0) \\
Q_3(S_3) & \xrightarrow{d_2^{(3)}} & Q_2(S_3) & \xrightarrow{d_1^{(3)}} & Q_1(S_3) & \xrightarrow{d_0^{(3)}} & Q_0(S_3) , \\
\Omega^3(\widehat{z}_2): & & \Omega^2(\widehat{z}_2): & & \Omega^1(\widehat{z}_2): \\
Q_6(S_3) & \xrightarrow{d_5^{(3)}} & Q_5(S_3) & \xrightarrow{d_4^{(3)}} & Q_4(S_3) & \xrightarrow{d_3^{(3)}} & Q_3(S_3) \\
\downarrow \begin{pmatrix} 0 & -\eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & & \downarrow (0,-1) & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & -\alpha\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & & \downarrow (0,-1) \\
Q_3(S_3) & \xrightarrow{d_2^{(3)}} & Q_2(S_3) & \xrightarrow{d_1^{(3)}} & Q_1(S_3) & \xrightarrow{d_0^{(3)}} & Q_0(S_3) .
\end{array}$$

Доказательство. Напомним, что отображения между модулями P_i мы задали при помощи умножения справа на элементы R , поэтому при вычислении композиции таких отображений следует читать $x^*y^* = (yx)^*$ ($x, y \in R$).

Необходимо доказать коммутативность указанных диаграмм. Заметим, что

$$\begin{aligned}
d_0^{(1)} &= \alpha, & d_1^{(1)} &= \beta, & d_2^{(1)} &= s_1; \\
d_0^{(2)} &= \gamma, & d_1^{(2)} &= \delta, & d_2^{(2)} &= s_2; \\
d_0^{(3)} &= (\beta, \delta), & d_1^{(3)} &= \begin{pmatrix} \gamma\delta\alpha\mu_1 \\ -\alpha\beta\gamma\mu_2 \end{pmatrix}, & d_2^{(3)} &= (-\alpha\beta, \gamma\delta), \\
d_3^{(3)} &= \begin{pmatrix} -\beta & \gamma\delta\eta_1 & 0 \\ 0 & \alpha\beta\eta_2 & 0 \end{pmatrix}, & d_4^{(3)} &= \begin{pmatrix} \gamma\delta\alpha\mu_1 & 0 \\ \alpha\beta & \gamma\delta \\ 0 & -\alpha\beta\gamma\mu_2 \end{pmatrix}, \\
d_5^{(3)} &= \begin{pmatrix} \alpha\beta & \gamma\delta\eta_1 & 0 \\ 0 & -\alpha\beta\eta_2 & \gamma\delta \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(1) Диаграмма для \widehat{x}_1 . $\beta\gamma\delta\eta_1 \circ d_0^{(1)} = s_3 = s_3 \circ 1$.

Диаграмма для \widehat{x}_2 . $\delta\alpha\beta\eta_2 \circ d_0^{(2)} = s_3 = s_3 \circ 1$.

Диаграмма для \widehat{y}_1 . $\alpha\beta\gamma\mu_2 \circ d_0^{(3)} = (s_1, 0) = s_1 \circ (1, 0)$.

Диаграмма для \widehat{y}_2 . $\alpha\beta\gamma\mu_2 \circ d_0^{(3)} = (0, s_2) = s_2 \circ (0, 1)$.

Диаграмма для \widehat{z}_0 . $(0, \delta) \circ d_1^{(3)} = -s_3 = s_3 \circ (-1)$.

Диаграмма для \widehat{z}_1 . $\gamma\delta\eta_1 \circ d_2^{(3)} = (-s_3, 0) = s_3 \circ (-1, 0)$.

Диаграмма для \widehat{z}_2 . $-\alpha\beta\eta_2 \circ d_2^{(3)} = (0, -s_3) = s_3 \circ (0, -1)$.

Диаграммы для \widehat{u}_i , $i = 1, 2$. Коммутативность очевидна.

(2) Ω -сдвиги \widehat{x}_1 .

$$\beta \circ d_3^{(1)} = \beta \circ d_0^{(1)} = \alpha\beta = d_2^{(3)} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ d_2^{(1)} = \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \end{pmatrix} = d_1^{(3)} \circ \beta; \quad 1 \circ d_1^{(1)} = \beta = d_0^{(3)} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ω -сдвиги \widehat{x}_2 .

$$-\delta \circ d_3^{(2)} = -\delta \circ d_0^{(2)} = -\gamma\delta = d_2^{(3)} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ d_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ s_2 \end{pmatrix} = d_1^{(3)} \circ (-\delta); \quad 1 \circ d_1^{(2)} = \delta = d_0^{(3)} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ω -сдвиги \widehat{y}_1 .

$$(-\gamma\delta\alpha\mu_1, 0) \circ d_3^{(3)} = (s_1, 0, 0) = d_2^{(1)} \circ (1, 0, 0);$$

$$\gamma\delta\eta_1 \circ d_2^{(3)} = (-s_3, 0) = d_1^{(1)} \circ (-\gamma\delta\alpha\mu_1, 0);$$

$$(1, 0) \circ d_1^{(3)} = \gamma\delta\alpha\mu_1 = d_0^{(1)} \circ \gamma\delta\eta_1.$$

Ω -сдвиги \widehat{y}_2 .

$$(0, -\alpha\beta\gamma\mu_2) \circ d_3^{(3)} = (0, 0, -s_2) = d_2^{(2)} \circ (0, 0, -1);$$

$$(-\alpha\beta\eta_2) \circ d_2^{(3)} = (0, -s_3) = d_1^{(2)} \circ (0, -\alpha\beta\gamma\mu_2);$$

$$(0, 1) \circ d_1^{(3)} = -\alpha\beta\gamma\mu_2 = d_0^{(2)} \circ (-\alpha\beta\eta_2).$$

Ω -сдвиги \widehat{z}_0 .

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ d_5^{(3)} = \begin{pmatrix} -\alpha\beta & -\gamma\delta\eta_1 & 0 \\ 0 & -\alpha\beta\eta_2 & \gamma\delta \end{pmatrix} = d_3^{(3)} \circ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix};$$

$$(0, 1, 0) \circ d_4^{(3)} = (\alpha\beta, \gamma\delta) = d_2^{(3)} \circ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \circ d_3^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma\delta\alpha\mu_1 & 0 \\ 0 & -\alpha\beta\gamma\mu_2 & 0 \end{pmatrix} = d_1^{(3)} \circ (0, 1, 0);$$

$$(-1) \circ d_2^{(3)} = (\alpha\beta, -\gamma\delta) = d_0^{(3)} \circ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Ω -сдвиги \widehat{z}_1 .

$$(1, 0) \circ d_5^{(3)} = (\alpha\beta, \gamma\delta\eta_1, 0) = d_2^{(3)} \circ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma\mu_2 & 0 \end{pmatrix} \circ d_4^{(3)} = \begin{pmatrix} \gamma\delta\alpha\mu_1 & 0 \\ -\alpha\beta\gamma\mu_2 & 0 \end{pmatrix} = d_1^{(3)} \circ (1, 0);$$

$$(-1, 0) \circ d_3^{(3)} = (\beta, -\gamma\delta\eta_1, 0) = d_0^{(3)} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma\mu_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ω -сдвиги \widehat{z}_2 .

$$(0, -1) \circ d_5^{(3)} = (0, \alpha\beta\eta_2, -\gamma\delta) = d_2^{(3)} \circ \begin{pmatrix} 0 & -\eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \circ d_4^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma\delta\alpha\mu_1 \\ 0 & \alpha\beta\gamma\mu_2 \end{pmatrix} = d_1^{(3)} \circ (0, -1);$$

$$(0, -1) \circ d_3^{(3)} = (0, -\alpha\beta\eta_2, -\delta) = d_0^{(3)} \circ \begin{pmatrix} 0 & -\alpha\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Замечание 2.3.2. Из квадратов, определяющих гомоморфизмы \widehat{u}_1 и \widehat{u}_2 , видно, что это — изоморфизмы $\widehat{u}_i: \Omega^3(S_i) \rightarrow S_i$. Таким образом, для всех $m \geq 1$ гомоморфизмы $\Omega^m(\widehat{u}_i)$ также являются изоморфизмами ($i = 1, 2$).

Лемма 2.3.3. *Как K -линейные пространства, приведенные ниже группы расширений имеют следующие образующие:*

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R^1(S_1, S_3) &= \langle x_1 \rangle, & \text{Ext}_R^1(S_2, S_3) &= \langle x_2 \rangle, \\ \text{Ext}_R^1(S_3, S_1) &= \langle y_1 \rangle, & \text{Ext}_R^1(S_3, S_2) &= \langle y_2 \rangle; \\ \text{Ext}_R^2(S_1, S_1) &= \langle y_1 x_1 \rangle, & \text{Ext}_R^2(S_2, S_2) &= \langle y_2 x_2 \rangle, \\ \text{Ext}_R^2(S_3, S_3) &= \langle z_0 \rangle; \\ \text{Ext}_R^3(S_1, S_1) &= \langle u_1 \rangle, & \text{Ext}_R^3(S_2, S_2) &= \langle u_2 \rangle, \\ \text{Ext}_R^3(S_3, S_3) &= \langle z_1, z_2 \rangle. \end{aligned}$$

Доказательство. Заметим, что $\dim_K \text{Ext}_R^3(S_3, S_3) = 2$, и размерности остальных указанных здесь Ext-групп равны единице (см. следствие 1.4.11). Тогда достаточно доказать, что z_1 и z_2 линейно независимы, а остальные указанные элементы отличны от нуля.

Из определения гомоморфизмов $\widehat{z}_1, \widehat{z}_2: \Omega^3(S_3) \rightarrow S_3$ непосредственно видно, что они линейно независимы, откуда мы получаем, что элементы z_1 и z_2 также линейно независимы (см. предложение 2.1.1). Кроме того, очевидно, что элементы x_i, y_i, u_i ($i = 1, 2$), z_0 ненулевые.

Таким образом, осталось показать только, что $y_1x_1, y_2x_2 \neq 0$. Заметим, что $\widehat{y_i x_i} = \widehat{y_i} \circ \Omega^1(\widehat{x_i})$, $i = 1, 2$, и рассмотрим следующие коммутативные диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
 Q_2(S_1) & \longrightarrow & Q_1(S_1) \\
 \Omega^1(\widehat{x_1}): \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \\
 Q_1(S_3) & \longrightarrow & Q_0(S_3) \\
 \widehat{y_1}: \downarrow (1,0) & & \downarrow \\
 Q_0(S_1) & \xrightarrow{s_1} & P_1,
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 Q_2(S_2) & \longrightarrow & Q_1(S_2) \\
 \Omega^1(\widehat{x_2}): \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & & \downarrow \\
 Q_1(S_3) & \longrightarrow & Q_0(S_3) \\
 \widehat{y_2}: \downarrow (0,1) & & \downarrow \\
 Q_0(S_2) & \xrightarrow{s_2} & P_2.
 \end{array}$$

Объемлющие квадраты этих диаграмм задают гомоморфизмы $\widehat{y_1 x_1}$ и $\widehat{y_2 x_2}$, соответственно. Мы видим, что $\widehat{y_1 x_1}, \widehat{y_2 x_2} \neq 0$, и получаем требуемое утверждение. \square

Предложение 2.3.4. *Для любых $i, j \in \{1, 2, 3\}$ любое каноническое отображение $f: \Omega^m(S_i) \rightarrow S_j$ представляется в виде композиции отображений $\widehat{x_k}, \widehat{y_k}, \widehat{z_k}, \widehat{u_k}$ ($k = 1, 2$), $\widehat{z_0}$, а также их Ω -сдвигов.*

Доказательство. Из следствия 1.4.11 вытекает, что в прямой сумме $\bigoplus_{c=1}^3 \bigoplus_{a,b=1}^3 \text{Ext}_R^c(S_a, S_b)$ все слагаемые равны нулю, кроме Ext-групп, указанных в формулировке леммы 2.3.3. Таким образом, при $m \leq 3$ требуемое утверждение следует из леммы 2.3.3.

Пусть $m \geq 4$. Из соображений симметрии, достаточно рассмотреть следующие четыре случая: (а) $i = j = 1$; (б) $i = 1, j = 3$; (в) $i = j = 3$; и (г) $i = 3, j = 1$.

(а) Ввиду замечания 2.3.2, $\Omega^{m-3}(\widehat{u_1}): \Omega^m(S_1) \rightarrow \Omega^{m-3}(S_1)$ — изоморфизм. Тогда имеется гомоморфизм $f': \Omega^{m-3}(S_1) \rightarrow S_1$ такой, что

$f = f' \circ \Omega^{m-3}(\hat{u}_1)$, и требуемое утверждение получается индукцией по m .

(б) Случай (б) рассматривается аналогично случаю (а).

(в) Если $f: \Omega^m(S_3) \rightarrow S_3$ индуцирует нулевое отображение на крайних (слева и справа) простых прямых слагаемых модуля $\text{top } \Omega^m(S_3)$, то ввиду теоремы 1.4.10(2), с учетом леммы 1.4.7, существует гомоморфизм $f': \Omega^{m-2}(S_3) \rightarrow S_3$ такой, что $f = f'\rho$, где $\rho: \Omega^m(S_3) \rightarrow \Omega^{m-2}(S_3)$ — канонический эпиморфизм. Так как $\rho = \Omega^{m-2}(\tilde{\rho})$ для некоторого гомоморфизма $\tilde{\rho}: \Omega^2(S_3) \rightarrow S_3$, то $f = f' \circ \Omega^{m-2}(\tilde{\rho})$, и требуемое утверждение получается индукцией по m .

Теперь предположим, что f индуцирует ненулевое отображение на одном из крайних прямых слагаемых в $\text{top } \Omega^m(S_3)$. Из соображений симметрии можно считать, что f индуцирует ненулевое отображение на крайнем слева прямом слагаемом в $\text{top } \Omega^m(S_3)$. Тогда из теоремы 1.4.10(2) следует, что $m \equiv 0 \pmod{3}$ или $m \equiv 2 \pmod{3}$.

Если $m \equiv 2 \pmod{3}$, то опять ввиду теоремы 1.4.10(2в) (см. также рисунок (1.21)) существует гомоморфизм $f': \Omega^{m-2}(S_3) \rightarrow S_3$ такой, что $f = f'\rho$, где $\rho: \Omega^m(S_3) \rightarrow \Omega^{m-2}(S_3)$ — канонический эпиморфизм. Тогда $f = f' \circ \Omega^{m-2}(\tilde{\rho})$ для некоторого $\tilde{\rho}: \Omega^2(S_3) \rightarrow S_3$, $\rho = \Omega^{m-2}(\tilde{\rho})$, и можно воспользоваться индукцией по m .

Если же $m \equiv 0 \pmod{3}$, то ввиду теоремы 1.4.10(2а) (см. также рисунок (1.21)) модуль $\Omega^m(S_3)$ имеет фактормодуль U с диаграммой

$$\begin{array}{ccc} S_3(*) & & S_3 \\ & \searrow \gamma\delta\eta_1 & \nearrow \alpha\beta \\ & S_3 & . \end{array}$$

При этом f проходит через U , т. е. $f = f'\rho$, где $\rho: \Omega^m(S_3) \rightarrow U$ — канонический эпиморфизм. Кроме того, мы поместили звездочкой тот простой модуль из $\text{top } U$, на котором f индуцирует ненулевое отображение (аналогично доказательству предложения 2.2.6, случай (а)). Заметим, что ввиду теоремы 1.4.10(2) модуль $\Omega^3(S_3)$ имеет диаграмму

$$\begin{array}{ccc} S_3 & & S_3 \\ & \searrow \gamma\delta\eta_1 & / \alpha\beta\eta_2 \\ & S_3 & , \end{array}$$

откуда видно, что модуль U вкладывается в $\Omega^3(S_3)$. Далее проводятся рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве предложения 2.2.6, случай (а).

(г) Пусть теперь $i = 3$, $j = 1$, $f: \Omega^m(S_3) \rightarrow S_1$. Тогда, ввиду теоремы 1.4.10(2), $m \equiv 1 \pmod{3}$, и f проходит через фактормодуль U модуля $\Omega^m(S_3)$, где U имеет диаграмму

$$\begin{array}{ccc} S_1(*) & & S_3 \\ & \searrow \gamma\delta\alpha\mu_1 & / \alpha\beta \\ & S_3 & . \end{array}$$

Тогда остается заметить, что U вкладывается в модуль $\Omega^1(S_3)$ с диаграммой

$$\begin{array}{ccc} S_1 & & S_3 \\ & \searrow \gamma\delta\alpha\mu_1 & / \alpha\beta\gamma\mu_2 \\ & S_3 & \end{array}$$

(см. теорему 1.4.10(2)), и провести аналогичные рассуждения. \square

Из предложения 2.3.4 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.3.5. *K-алгебра $\mathcal{Y}(R)$ порождается элементами*

$$x_i, y_i, z_i, u_i (i = 1, 2), z_0. \quad (2.12)$$

Теорема 2.3.6. *Для образующих (2.12) алгебры $\mathcal{Y}(R)$ выполнены соотношения (1.2).*

Доказательство. Соотношения (1.2) проверяются единообразно, с использованием рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве предложения 2.2.8.

Соотношения $x_i y_i = 0$ ($i = 1, 2$). Заметим, что $\widehat{x_i y_i} = \widehat{x_i} \circ \Omega^1(\widehat{y_i})$, и рассмотрим коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} Q_2(S_3) & \longrightarrow & Q_1(S_3) \\ \Omega^1(\widehat{y_1}): \downarrow \gamma \delta \eta_1 & & \downarrow \\ Q_1(S_1) & \longrightarrow & Q_0(S_1) \\ \widehat{x_1}: \downarrow 1 & & \downarrow \\ Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Q_2(S_3) & \longrightarrow & Q_1(S_3) \\ \Omega^1(\widehat{y_2}): \downarrow -\alpha \beta \eta_2 & & \downarrow \\ Q_1(S_2) & \longrightarrow & Q_0(S_2) \\ \widehat{x_2}: \downarrow 1 & & \downarrow \\ Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3. \end{array}$$

Тогда композиция гомоморфизмов из первой диаграммы $s_3 \circ 1 \circ \gamma \delta \eta_1 = \gamma \delta \eta_1 s_3 = 0$, откуда $x_1 y_1 = 0$. Аналогично, рассматривая композицию $s_3 \circ 1 \circ (-\alpha \beta \eta_2) = -\alpha \beta \eta_2 s_3 = 0$ гомоморфизмов из второй диаграммы, мы получаем $x_2 y_2 = 0$.

Соотношения $x_i u_i = z_i x_i$ ($i = 1, 2$). Рассмотрим следующие пары коммутативных диаграмм:

$$\begin{array}{ccc} Q_4(S_1) & \longrightarrow & Q_3(S_1) \\ \Omega^1(\widehat{u_1}): \downarrow 1 & & \downarrow \\ Q_1(S_1) & \longrightarrow & Q_0(S_1) \\ \widehat{x_1}: \downarrow 1 & & \downarrow \\ Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Q_4(S_1) & \longrightarrow & Q_3(S_1) \\ \Omega^3(\widehat{x_1}): \downarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \\ Q_3(S_3) & \longrightarrow & Q_2(S_3) \\ \widehat{z_1}: \downarrow (-1, 0) & & \downarrow \\ Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3; \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
Q_4(S_2) & \longrightarrow & Q_3(S_2) \\
\Omega^1(\widehat{u}_2): & \downarrow 1 & \downarrow \\
Q_1(S_2) & \longrightarrow & Q_0(S_2) \\
\widehat{x}_2: & \downarrow 1 & \downarrow \\
Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
Q_4(S_2) & \longrightarrow & Q_3(S_2) \\
\Omega^3(\widehat{x}_2): & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \downarrow \\
Q_3(S_2) & \longrightarrow & Q_2(S_2) \\
\widehat{z}_2: & \downarrow (0,-1) & \downarrow \\
Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3.
\end{array}$$

Из диаграмм непосредственно видно, что $x_1u_1 = z_1x_1$, и $x_2u_2 = z_2x_2$.

Соотношения $u_iy_i = y_iz_i$ ($i = 1, 2$). Рассмотрим следующие пары коммутативных диаграмм:

$$\begin{array}{ccc}
Q_4(S_3) & \longrightarrow & Q_3(S_3) \\
\Omega^3(\widehat{y}_1): & \downarrow (1,0,0) & \downarrow \\
Q_3(S_1) & \longrightarrow & Q_2(S_1) \\
\widehat{u}_1: & \downarrow 1 & \downarrow \\
Q_0(S_1) & \xrightarrow{s_1} & P_1,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
Q_4(S_3) & \longrightarrow & Q_3(S_3) \\
\Omega^1(\widehat{z}_1): & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma\mu_2 & 0 \end{pmatrix} & \downarrow \\
Q_1(S_3) & \longrightarrow & Q_0(S_3) \\
\widehat{y}_1: & \downarrow (1,0) & \downarrow \\
Q_0(S_1) & \xrightarrow{s_1} & P_1;
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
Q_4(S_3) & \longrightarrow & Q_3(S_3) \\
\Omega^3(\widehat{y}_2): & \downarrow (0,0,-1) & \downarrow \\
Q_3(S_2) & \longrightarrow & Q_2(S_2) \\
\widehat{u}_2: & \downarrow 1 & \downarrow \\
Q_0(S_2) & \xrightarrow{s_2} & P_2,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
Q_4(S_3) & \longrightarrow & Q_3(S_3) \\
\Omega^1(\widehat{z}_2): & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & -\alpha\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \downarrow \\
Q_1(S_3) & \longrightarrow & Q_0(S_3) \\
\widehat{y}_2: & \downarrow (0,1) & \downarrow \\
Q_0(S_2) & \xrightarrow{s_2} & P_2.
\end{array}$$

Опять, из указанных диаграмм непосредственно видно, что $u_1y_1 = y_1z_1$, и $u_2y_2 = y_2z_2$.

Соотношения $y_ix_j = 0$ ($i \neq j$). В этом случае достаточно заметить, что $y_ix_j \in \text{Ext}_R^2(S_j, S_i) = 0$ (см. следствие 1.4.11(1)).

Соотношения $z_i x_j = 0$ ($i \neq j$). Рассмотрим следующие коммутативные диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
 Q_3(S_1) & \longrightarrow & Q_2(S_1) \\
 \Omega^2(\widehat{x}_1): \downarrow \beta & & \downarrow \\
 Q_2(S_3) & \longrightarrow & Q_1(S_3) \\
 \widehat{z}_0: \downarrow -1 & & \downarrow \\
 Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3 , \\
 \\
 Q_4(S_2) & \longrightarrow & Q_3(S_2) \\
 \Omega^3(\widehat{x}_2): \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & & \downarrow \\
 Q_3(S_3) & \longrightarrow & Q_2(S_3) \\
 \widehat{z}_1: \downarrow (-1, 0) & & \downarrow \\
 Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3 , \\
 \\
 Q_4(S_1) & \longrightarrow & Q_3(S_1) \\
 \Omega^3(\widehat{x}_1): \downarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \\
 Q_3(S_3) & \longrightarrow & Q_2(S_3) \\
 \widehat{z}_2: \downarrow (0, -1) & & \downarrow \\
 Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3 .
 \end{array}$$

Композиция гомоморфизмов из первой диаграммы $s_3 \circ (-1) \circ \beta = -\beta s_3 = 0$, откуда $z_0 x_1 = 0$, и композиция гомоморфизмов из второй диаграммы $s_3 \circ (-1) \circ (-\delta) = \delta s_3 = 0$, откуда $z_0 x_2 = 0$. Из второй пары указанных диаграмм непосредственно видно, что $z_1 x_2 = z_2 x_1 = 0$.

Соотношения $y_i z_j = 0$ ($i \neq j$). Рассмотрим следующие коммутативные диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
 Q_3(S_3) & \longrightarrow & Q_2(S_3) \\
 \Omega^1(\widehat{z}_0): \downarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} & & \downarrow \\
 Q_1(S_3) & \longrightarrow & Q_0(S_3) \\
 \widehat{y}_1: \downarrow (1, 0) & & \downarrow \\
 Q_0(S_1) & \xrightarrow{s_1} & P_1 , \\
 \\
 Q_3(S_3) & \longrightarrow & Q_2(S_3) \\
 \Omega^1(\widehat{z}_0): \downarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} & & \downarrow \\
 Q_1(S_3) & \longrightarrow & Q_0(S_3) \\
 \widehat{y}_2: \downarrow (0, 1) & & \downarrow \\
 Q_0(S_2) & \xrightarrow{s_2} & P_2 ;
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
Q_4(S_3) & \longrightarrow & Q_3(S_3) \\
\Omega^1(\widehat{z}_2): & \downarrow \begin{pmatrix} 0 & -\alpha\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \downarrow & \\
Q_1(S_3) & \longrightarrow & Q_0(S_3) \\
\widehat{y}_1: & \downarrow (1,0) & \downarrow \\
Q_0(S_1) & \xrightarrow{s_1} & P_1,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
Q_4(S_3) & \longrightarrow & Q_3(S_3) \\
\Omega^1(\widehat{z}_1): & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma\mu_2 & 0 \end{pmatrix} \downarrow & \\
Q_1(S_3) & \longrightarrow & Q_0(S_3) \\
\widehat{y}_2: & \downarrow (0,1) & \downarrow \\
Q_0(S_2) & \xrightarrow{s_2} & P_2.
\end{array}$$

Композиция гомоморфизмов из первой диаграммы $s_1 \circ (1, 0) \circ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} = (\alpha s_1, 0) = 0$, из второй диаграммы $s_2 \circ (0, 1) \circ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} = (0, -\gamma s_2) = 0$, из третьей диаграммы $s_1 \circ (1, 0) \circ \begin{pmatrix} 0 & -\alpha\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (0, -\alpha\mu_1 s_1, 0) = 0$, и из четвертой диаграммы $s_2 \circ (0, 1) \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma\mu_2 & 0 \end{pmatrix} = (0, -\gamma\mu_2 s_2, 0) = 0$, откуда $y_1 z_0 = 0$, $y_2 z_0 = 0$, $y_1 z_2 = 0$, и $y_2 z_1 = 0$, соответственно.

Соотношения $z_i z_j = -z_j z_i$ ($i \neq j$) и

$$z_1 z_2 = \begin{cases} z_0^3, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n > 1. \end{cases}$$

Рассмотрим следующие пары коммутативных диаграмм:

$$\begin{array}{ccc}
Q_5(S_3) & \longrightarrow & Q_4(S_3) \\
\Omega^2(\widehat{z}_1): & \downarrow (1,0) & \downarrow \\
Q_2(S_3) & \longrightarrow & Q_1(S_3) \\
\widehat{z}_0: & \downarrow -1 & \downarrow \\
Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
Q_5(S_3) & \longrightarrow & Q_4(S_3) \\
\Omega^3(\widehat{z}_0): & \downarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \downarrow & \\
Q_3(S_3) & \longrightarrow & Q_2(S_3) \\
\widehat{z}_1: & \downarrow (-1,0) & \downarrow \\
Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3;
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
Q_5(S_3) & \longrightarrow & Q_4(S_3) \\
\Omega^2(\widehat{z}_2): & \downarrow (0,-1) & \downarrow \\
Q_2(S_3) & \longrightarrow & Q_1(S_3) \\
\widehat{z}_0: & \downarrow -1 & \downarrow \\
Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
Q_5(S_3) & \longrightarrow & Q_4(S_3) \\
\Omega^3(\widehat{z}_0): & \downarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \downarrow & \\
Q_3(S_3) & \longrightarrow & Q_2(S_3) \\
\widehat{z}_2: & \downarrow (0,-1) & \downarrow \\
Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3.
\end{array}$$

Из сравнения диаграмм в первой и второй паре непосредственно видно, что $z_0 z_1 = -z_1 z_0$ и $z_0 z_2 = -z_2 z_0$, соответственно.

Осталось показать, что $z_1 z_2 = -z_2 z_1 = z_0^3$ при $n = 1$, и $z_1 z_2 = -z_2 z_1 = 0$ при $n > 1$. Рассмотрим коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
Q_6(S_3) & \longrightarrow & Q_5(S_3) \\
\Omega^4(\widehat{z}_0): \downarrow \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow \\
Q_4(S_3) & \longrightarrow & Q_3(S_3) \\
\Omega^2(\widehat{z}_0): \downarrow (0,1,0) & & \downarrow \\
Q_2(S_3) & \longrightarrow & Q_1(S_3) \\
\widehat{z}_0: \downarrow -1 & & \downarrow \\
Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3,
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
Q_6(S_3) & \longrightarrow & Q_5(S_3) & & Q_6(S_3) & \longrightarrow & Q_5(S_3) \\
\Omega^3(\widehat{z}_2): \downarrow \begin{pmatrix} 0 & -\eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \downarrow & & \Omega^3(\widehat{z}_1): \downarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Q_3(S_3) & \longrightarrow & Q_2(S_3) & & Q_3(S_3) & \longrightarrow & Q_2(S_3) \\
\widehat{z}_1: \downarrow (-1,0) & & \downarrow & & \widehat{z}_2: \downarrow (0,-1) & & \downarrow \\
Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3, & & Q_0(S_3) & \xrightarrow{s_3} & P_3.
\end{array}$$

Композиция гомоморфизмов из первой диаграммы

$$s_3 \circ (-1) \circ (0, 1, 0) \circ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = (0, s_3, 0);$$

композиция гомоморфизмов из второй диаграммы

$$\begin{aligned}
s_3 \circ (-1, 0) \circ \begin{pmatrix} 0 & -\eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} &= (0, \eta_1 s_3, 0) = \\
(0, (\alpha\beta\gamma\delta)^{2n-1}, 0) &= \begin{cases} (0, s_3, 0), & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n > 1; \end{cases}
\end{aligned}$$

и композиция гомоморфизмов из третьей диаграммы

$$s_3 \circ (0, -1) \circ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \end{pmatrix} = (0, -\eta_2 s_3, 0) = \\ (0, -(\gamma\delta\alpha\beta)^{2n-1}, 0) = \begin{cases} (0, -s_3, 0), & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n > 1; \end{cases}$$

откуда мы получаем требуемые равенства. \square

Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n^{(A)} = K[\mathfrak{R}^{(A)}]/I$ — градуированная K -алгебра, определенная в параграфе 1.1, где I — идеал, порожденный элементами, соответствующими соотношениям (1.2). Ввиду теоремы 2.3.6 существует сюръективный гомоморфизм градуированных K -алгебр $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Y}(R)$, переводящий канонические образующие алгебры \mathcal{E} (т. е. соответствующие стрелкам в $\mathfrak{R}^{(A)}$) в соответствующие образующие алгебры $\mathcal{Y}(R)$.

Пусть $\mathcal{E} = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{E}^m$ — прямое разложение, соответствующее градуировке на \mathcal{E} . Через e_i , $i = 1, 2, 3$, обозначим идемпотенты алгебры $K[\mathfrak{R}^{(A)}]$, соответствующие вершинам колчана $\mathfrak{R}^{(A)}$, и так же обозначим образы этих идемпотентов в \mathcal{E} . Следующее утверждение завершает доказательство теоремы 1.1.3.

Теорема 2.3.7. $\dim_K(e_i \mathcal{E}^m e_j) = \dim_K \text{Ext}_R^m(S_j, S_i)$ для любого $m \geq 0$ и любых $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Доказательство. Проведем доказательство аналогично доказательству предложения 2.2.9. Поскольку утверждение очевидно при $m = 0, 1$, то будем считать, что $m \geq 2$. Из соображений симметрии, достаточно рассмотреть следующие случаи: (а) $i = 1, j = 1$; (б) $i = 1, j = 2$; (в) $i = 1, j = 3$; (г) $i = 3, j = 1$; и (д) $i = 3, j = 3$.

(а) Покажем, что любое произведение $v_1 v_2 \dots v_l \in e_1 \mathcal{E}^m e_1$ образующих алгебры \mathcal{E} (т. е. элементы $v_1, v_2, \dots, v_l \in \{z_0, x_k, y_k, z_k, u_k \mid k = 1, 2\}$) либо равно нулю, либо равно с точностью до знака произведению вида $y_1 x_1 u_1^t$ (и тогда $m = 3t + 2$) или u_1^t (и тогда $m = 3t$). Если считать, что это доказано, то требуемое утверждение непосредственно вытекает из следствия 1.4.11(2).

Действительно, пусть $v_1 v_2 \dots v_l \neq 0$, $v_1 v_2 \dots v_l \in e_1 \mathcal{E}^m e_1$. Тогда из колчана $\mathfrak{R}^{(A)}$ видно, что $v_l = u_1$ или $v_l = x_1$. Если $v_l = u_1$, то можно воспользоваться индукцией по m . Предположим, что $v_l = x_1$. Из соотношений (1.2) мы получаем, что $v_{l-1} = z_1$ или $v_{l-1} = y_1$. Если $v_{l-1} = z_1$, то $v_1 v_2 \dots v_l = v_1 \dots v_{l-2} z_1 x_1 = v_1 \dots v_{l-2} x_1 u_1$, и можно воспользоваться индукцией по m . Если же $v_{l-1} = y_1$, то заметим, что $v_1 v_2 \dots v_{l-2} \in e_1 \mathcal{E}^{m-2} e_1$, и по предположению индукции можно считать, что $v_{l-2} = u_1$. Тогда $v_1 v_2 \dots v_l = v_1 \dots v_{l-3} u_1 y_1 x_1 = v_1 \dots v_{l-3} y_1 z_1 x_1$, и мы приходим к только что разобранным случаю $v_{l-1} = z_1$.

(б) Ввиду следствия 1.4.11(1), достаточно показать, что $e_1 \mathcal{E}^m e_2 = 0$. Пусть $v_1 v_2 \dots v_l \in e_1 \mathcal{E}^m e_2$ — произведение образующих алгебры \mathcal{E} . Предположим, что $v_1 v_2 \dots v_l \neq 0$. Тогда из колчана $\mathfrak{R}^{(A)}$ видно, что в этом произведении должны встретиться элементы x_2 и y_1 , причем x_2 встретится раньше (если читать “слово” $v_1 v_2 \dots v_l$ справа налево). Таким образом, $v_1 v_2 \dots v_l = \dots y_1 \dots x_2 \dots$, и при помощи перестановочных соотношений (1.2) мы получаем, что $v_1 v_2 \dots v_l = \pm \dots y_1 x_2 \dots$, откуда $v_1 v_2 \dots v_l = 0$, так как $y_1 x_2 = 0$.

(в) Пусть $v_1 v_2 \dots v_l \in e_1 \mathcal{E}^m e_3$ — ненулевое произведение образующих алгебры \mathcal{E} . Тогда среди v_1, v_2, \dots, v_l должен встретиться элемент y_1 . Из соотношений (1.2), с учетом случая (а), мы получаем, что произведение $v_1 v_2 \dots v_l$ равно с точностью до знака произведению вида $u_1^t y_1$ (и тогда $m = 3t + 1$) или $y_1 x_1 u_1^t y_1$. Поскольку $y_1 x_1 u_1^t y_1 = y_1 x_1 y_1 z_1^t = 0$, то мы получаем, что размерность $\dim_K(e_1 \mathcal{E}^m e_3) = 1$, если $m \equiv 1 \pmod{3}$, и равна нулю, если $m \equiv 0 \pmod{3}$ или $m \equiv 2 \pmod{3}$. Таким образом, требуемое утверждение вытекает из следствия 1.4.11(3).

(г) Случай (г) рассматривается аналогично случаю (в), где роль элемента y_1 отводится элементу x_1 .

(д) Пусть теперь $v_1 v_2 \dots v_l \in e_3 \mathcal{E}^m e_3$ — ненулевое произведение образующих алгебры \mathcal{E} . Рассуждения, аналогичные проведенным при разборе случая (б), показывают, что среди v_1, v_2, \dots, v_l не может встретиться элемент y_1 , так как в противном случае $v_1 v_2 \dots v_l = \dots x_1 \dots y_1 \dots = \pm \dots x_1 y_1 \dots = 0$. Аналогично, среди v_1, v_2, \dots, v_l не могут встретиться элементы x_1, x_2, y_2 . С учетом последних двух соотношений из (1.2), мы получаем, что K -базис пространства $e_3 \mathcal{E}^m e_3$ составляют “одночлены” вида $z_1^s z_0^t, z_2^s z_0^t, 3s + 2t = m$ ($s, t \geq 0$).

Обозначим $d_m = \dim_K(e_3 \mathcal{E}^m e_3)$. Тогда рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве предложения 2.2.9, случай (а), показывают, что для любого $m \geq 2$

$$d_m = \begin{cases} d_{m-2} + 2, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{3}, \\ d_{m-2}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.13)$$

Таким образом, остается заметить, что последовательность $\{d'_m\}_{m \geq 1}$, $d'_m = \dim_K \text{Ext}_R^m(S_3, S_3)$, определенная в следствии 1.4.11(4), удовлетворяет рекуррентному соотношению, аналогичному (2.13). Действительно, если $m = 3k$, то $d'_m = k + 1$, $d'_{m-2} = d'_{3(k-1)+1} = k - 1$, и $d'_m = d'_{m-2} + 2$; если $m = 3k + 1$, то $d'_m = k$, $d'_{m-2} = d'_{3(k-1)+2} = (k - 1) + 1 = k$, и $d'_m = d'_{m-2}$; и если $m = 3k + 2$, то $d'_m = k + 1$, $d'_{m-2} = d'_{3k} = k + 1$, и $d'_m = d'_{m-2}$. \square

Доказательство следствия 1.1.6. Отметим, что $\mathcal{E}(S_1) \simeq e_1 \mathcal{E} e_1$, и рассмотрим в алгебре $e_1 \mathcal{E} e_1$ элементы $\beta = y_1 x_1$ и $\gamma = u_1$. Из соотношений (1.2) мы получаем, что $\beta \gamma = y_1 x_1 u_1 = y_1 z_1 x_1 = u_1 y_1 x_1 = \gamma \beta \neq 0$, $\beta^2 = y_1 x_1 y_1 x_1 = 0$, и соответствующая часть требуемого утверждения вытекает из вида базиса для $e_1 \mathcal{E}^m e_1$ из доказательства теоремы 2.3.7, случай (а).

Далее, $\mathcal{E}(S_2) \simeq e_2 \mathcal{E} e_2$, и, заменяя в только что проведенном рассуждении (и в доказательстве теоремы 2.3.7, случай (а)) индекс 1 на индекс 2, мы получаем соответствующую часть требуемого утверждения.

Наконец, рассмотрим алгебру $e_3 \mathcal{E} e_3 \simeq \mathcal{E}(S_3)$ и ее элементы $\beta = z_0$, $\gamma_1 = z_1$, $\gamma_2 = z_2$. Тогда соотношения (для порождающих элементов $\beta, \gamma_1, \gamma_2$), определяющие алгебры \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 из следствия 1.1.6, идентичны последним двум соотношениям (для $z_0, z_1, z_2 \in e_3 \mathcal{E} e_3$) из (1.2), и соответствующая часть требуемого утверждения вытекает из вида базиса для $e_3 \mathcal{E}^m e_3$ из доказательства теоремы 2.3.7, случай (д). \square

Литература

1. *Балашов О.И.* Проективные резольвенты и алгебры Йонеды для одного класса диэдральных алгебр // Деп. ВИНТИ № 1446-В99 от 07.05.99. 8 с.
2. *Балашов О.И.* Когомологии алгебр диэдрального типа: серия $D(3K)$ // Деп. ВИНТИ № 1260-В00 от 27.04.00. 16 с.
3. *Балашов О.И., Генералов А.И.* Алгебры Йонеды для одного класса диэдральных алгебр // Вестн. С.-Петербур. ун-та. Сер. 1. 1999. Вып. 3 (№ 15). С. 3–10.
4. *Бондаренко В.М.* Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сборник. 1975. Т. 96. С. 63–74.
5. *Бондаренко В.М., Дрозд Ю.А.* Представленческий тип конечных групп // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1977. Т. 71. С. 24–41.
6. *Венков Б.Б.* Об алгебрах когомологий некоторых классифицирующих пространств // Доклады Акад. наук СССР. 1959. Т. 127 (№ 5). С. 943–944.
7. *Гельфанд С.И., Манин Ю.И.* Гомологическая алгебра // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. направления. ВИНТИ. 1989. Т. 38. С. 5–238.

8. *Генералов А.И.* Алгебры Йонеды полуцепных QF -алгебр // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1999. Т. 265. С. 130–138.
9. *Генералов А.И.* Когомологии алгебр диэдрального типа, I // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1999. Т. 265. С. 139–162.
10. *Голод Е.С.* О кольце когомологий конечной p -группы // Доклады Акад. наук СССР. 1959. Т. 125 (№ 4). С. 703–706.
11. *Дрозд Ю.А.* О ручных и диких матричных задачах // В сб.: Матричные задачи. Киев, 1977. С. 104–114.
12. *Дрозд Ю.А.* Ручные и дикие матричные задачи // В сб.: Представления и квадратичные формы. Киев, 1979. С. 39–74.
13. *Картан А., Эйленберг С.* Гомологическая алгебра. М.: ИЛ, 1960. 510 с.
14. *Кругляк С.А.* О представлениях группы (p, p) над полем характеристики p // Доклады Акад. наук СССР. 1963. Т. 153 (№ 6). С. 1253–1256.
15. *Маклейн С.* Гомология. М., 1966. 543 с.
16. *Назарова Л.А., Ройтер А.В.* Об одной задаче И. М. Гельфанда // Функц. анализ и его прил. 1973. Т. 7 (вып. 4). С. 54–69.
17. *Adem A., Milgram R.J.* Cohomology of finite groups. Berlin; Heidelberg. 1994. 327 p.
18. *Alperin J.L.* Resolutions for finite groups // In: Iwahori N. (ed.) Finite Groups. Japan Soc. for Promotion of Science. Tokyo, 1976. P. 1–7.

19. *Alperin J.L.* Periodicity in groups // Ill. J. Math. 1977. Vol. 21. P. 776–783.
20. *Alperin J.L.* Diagrams for modules // J. Pure Appl. Algebra. 1980. Vol. 16. P. 111–119.
21. *Alperin J.L., Evens L.* Representations, resolutions, and Quillen's dimension theorem // J. Pure Appl. Algebra. 1981. Vol. 22. P. 1–9.
22. *Alperin J.L., Evens L.* Varieties and elementary abelian subgroups // J. Pure Appl. Algebra. 1982. Vol. 26. P. 221–227.
23. *Auslander M., Reiten I.* Representation theory of Artin algebras, III: Almost split sequences // Comm. Algebra. 1975. Vol. 3. P. 239–294.
24. *Auslander M., Reiten I.* Representation theory of Artin algebras, IV: Invariants given by almost split sequences // Comm. Algebra. 1977. Vol. 5. P. 443–518.
25. *Benson D.J.* Modular representation theory: New trends and methods // Lect. Notes in Math. 1984. V. 1081. 231 p.
26. *Benson D.J.* Representations and cohomology. Vol. I. Cambridge, 1991. 224 p.
27. *Benson D.J., Carlson J.F.* Complexity and Multiple Complexes // Math. Zeit. 1987. Vol. 195. P. 221–238.
28. *Benson D.J., Carlson J.F.* Diagrammatic methods for modular representations and cohomology // Comm. in Algebra. 1987. Vol. 15, № 1/2. P. 53–121.

29. *Brenner S.* Modular representations of p -groups // J. Algebra. 1970. Vol. 15. P. 89–102.
30. *Carlson J.F.* The varieties and the cohomology ring of a module // J. Algebra. 1983. Vol. 85. P. 104–143.
31. *Carlson J.F.* The variety of an indecomposable module is connected // Invent. Math. 1984. Vol. 77. P. 291–299.
32. *Crawley-Boevey W.W.* On tame algebras and BOCS's // Proc. London Math. Soc. 1988. Vol. 56. P. 451–483.
33. *Erdmann K.* Principal blocks of groups with dihedral Sylow 2-subgroups // Comm. Algebra. 1977. Vol. 5 (№ 7). P. 665–694.
34. *Erdmann K.* Algebras and dihedral defect groups // Proc. London Math. Soc. 1987. Vol. 54. P. 88–114.
35. *Erdmann K.* On the number of simple modules in certain tame blocks and algebras // Archiv Math. 1988. Vol. 51. P. 34–38.
36. *Erdmann K.* Algebras and semidihedral defect groups, I // Proc. London Math. Soc. 1988. Vol. 57. P. 109–150.
37. *Erdmann K.* Algebras and quaternion defect groups, I // Math. Ann. 1988. Vol. 281. P. 545–560.
38. *Erdmann K.* Algebras and quaternion defect groups, II // Math. Ann. 1988. Vol. 281. P. 561–582.
39. *Erdmann K.* Algebras and semidihedral defect groups, II // Proc. London Math. Soc. 1990. Vol. 60. P. 123–165.

40. *Erdmann K.* Blocks of tame representation type and related algebras // Lect. Notes in Math. 1990. Vol. 1428. 311 p.
41. *Erdmann K.* On the local structure of tame blocks // Asterisque. 1990. Vol. 181-182. P. 173–189.
42. *Evens L.* The cohomology ring of a finite group // Trans. AMS. 1961. Vol. 101. P. 224–239.
43. *Gabriel P.* Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras // In: Representation theory, I. Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 1980. Vol. 831. P. 1–71.
44. *Gabriel P., Riedtmann C.* Group representations without groups // Comm. Math. Helv. 1979. Vol. 54. P. 240–287.
45. *Green E.L.* Frobenius algebras and their quivers // Can. J. Math. Vol. 30, № 5. 1978. P. 1029–1044.
46. *Green E.L., Martinez-Villa R.* Koszul and Yoneda algebras // In: Representation theory of algebras, CMS Conf. Proc., 1996. Vol. 18. P. 247–297.
47. *Green E.L., Zacharia D.* The cohomology ring of a monomial algebra // Manuscripta Math. 1994. Vol. 85. P. 11–23.
48. *Green J.A.* Relative module categories for finite groups // J. Pure Appl. Algebra. 1972. № 2. P. 371–393.
49. *Higman D.* Indecomposable representations at characteristics p // Duke Math. J. 1954. Vol. 21. P. 377–381.

50. *Janusz G.J.* Indecomposable representations of groups with a cyclic Sylow subgroup // Trans. AMS. 1966. Vol. 125. P. 288–295.
51. *Löfwall C.* On the subalgebra generated by the one-dimensional elements in the Yoneda Ext-algebra // Lect. Notes Math. 1988. Vol. 1352. P. 291–338.
52. *Meltzer H.* Survey on the representation type of group algebras // Beiträge zur Algebra und Geom. 1987. Vol. 24. P. 177–184.
53. *Michler G.O.* Green correspondence between blocks with cyclic defect groups, I // J. Algebra. 1976. Vol. 39. P. 26–51.
54. *Michler G.O.* Green correspondence between blocks with cyclic defect groups, II // Lect. Notes in Math. 1974. Vol. 488. P. 210–235.
55. *Stammbach U.* Types of projective resolutions for finite groups // The Hilton Sympos. 1993, Topics in Topol. and Group Theory, Centre de Rech. Math., in: CRM Proc. and Lect. Notes. 1994. Vol. 6. P. 187–198.
56. *Parshall B.* The Ext algebra of a highest weight category // In: V. Dlab and L. Scott (eds.), Finite dimensional algebras and related topics. Kluwer Acad. Pub., 1994. P. 213–222.
57. *Ringel C.M.* The indecomposable representations of dihedral 2-groups // Math. Ann. 1975. Vol. 214. P. 19–34.
58. *Ringel C.M.* Tame group algebras // In: Darstellungs-theorie endlich dimensionaler Algebren. Oberwolfach, 1977. P. 92–95.